

集合的基数

回顾

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

- 函数是特殊的关系（所有定义域元素唯一指派）；单射满足若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $x_1 = x_2$ ，满射满足 $f(A) = B$ ；反函数、复合函数

本节提要

3

问题1：什么是集合的基数？

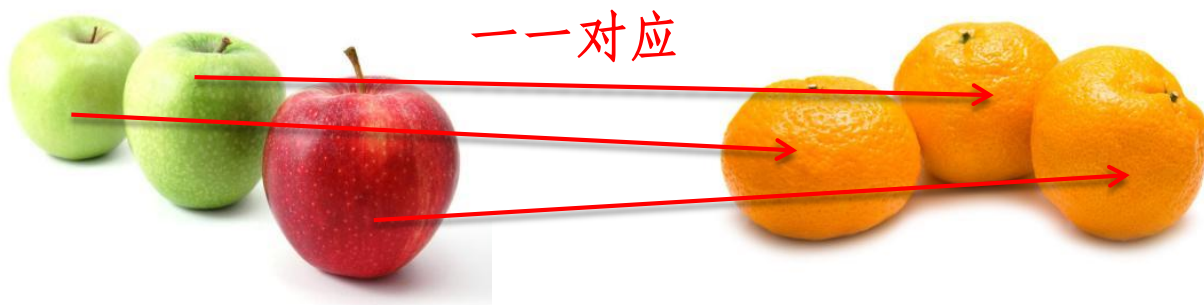
问题2：(基数)最大的集合有多大？

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小？

集合的基数

4

- 集合的基数：集合的元素个数
 - “数得清”的有限集合：元素个数



- “数不清”的无限集合呢？

$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 与 $\{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$

各有多少个元素？哪个集合的元素多？

有限与无限：“宇宙旅馆”

5



啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第 1 号房间吧！

自然数集合的基数

6

- 对于有限集合，我们用自然数描述集合的大小
 - ▣ 例如，苹果的个数、班级学生的个数
- 那么，自然数有多少个？
 - ▣ 给你任意一个自然数，总有比它大的^(*)
- 定义自然数个数为 $\aleph_0$
 - ▣ 读作：**Aleph-null**
 - ▣ $\aleph_0$ 是最小的一个无限数

^(*)有些人依然不相信无限的存在。这门课接受无穷公理，即自然数集是无限的。

比较集合的大小：等势关系

7

- 如果存在从集合**A**到**B**的**双射**，则称集合**A**与**B****等势**
 - 记为： $A \approx B$ ，否则 $A \not\approx B$
 - 双射意味着：**A**，**B**中的元素可以“**一一对应**”
 - 要证明 $A \approx B$ ，找出**一个**从**A**到**B**的双射
- 集合的势就是集合的基数，记为 $|A|$ 或 **card A**
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

有限集与无限集 (1)

8

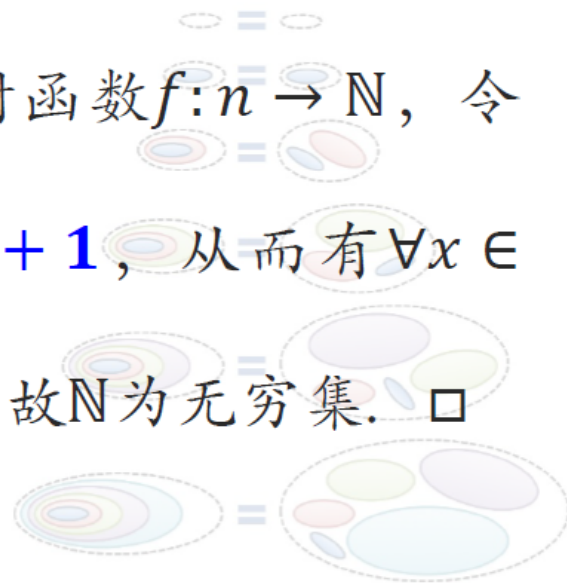
□ **S**是有限集合/有穷集合，iff 存在自然数 n ，使得**S**的基数为 n (**S**与 n 等势)

■ **证明：**自然数集 $\mathbb{N}$ 是无穷集

反设 $\mathbb{N}$ 有穷，从而存在 n 以及双射函数 $f: n \rightarrow \mathbb{N}$ ，令

$m = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + 1$ ，从而有 $\forall x \in$

$n, f(x) \neq m$ ，故 f 非满射，矛盾！故 $\mathbb{N}$ 为无穷集。□



有限集与无限集 (2)

9

□ **S**不是有限集合(是无限集/无穷集), iff 存在**S**的真子集**S'**, 使得**S**与**S'**等势

⇒ **S**一定包含一个与自然数集合等势的子集**M** = $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

令**S'** = **S** - $\{a_0\}$, 可以定义 $f: S \rightarrow S'$ 如下:

对于任意 $a_i \in M$, $f(a_i) = a_{i+1}$; 对于任意 $x \in S - M$, $f(x) = x$.

显然这是双射, 即**S**与其真子集**S'**等势。

⇐ 假设**S**是有限集, 令 $|S| = n$, 则对**S**的任意真子集**S'**, 若 $|S'| = m$, 必有 $m < n$, 因此从**S'**到**S**的任一单射不可能是满射。

本节提要

10

问题1：什么是集合的基数？

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是 $\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大？

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小？

与自然数集等势的集合

11

- 平方数集与自然数集等势
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

$$g(n) = \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ -2n-1 & n < 0 \end{cases}$$

- 偶数集? 奇数集? 有理数集? ~~实数集?~~
 - ▣ 若集合A与自然数集合N等势, 则 $\text{card } A = \aleph_0$
 - ▣ 若集合A与实数集合R等势, 则 $\text{card } A = \aleph$

可数集（可列集）

12

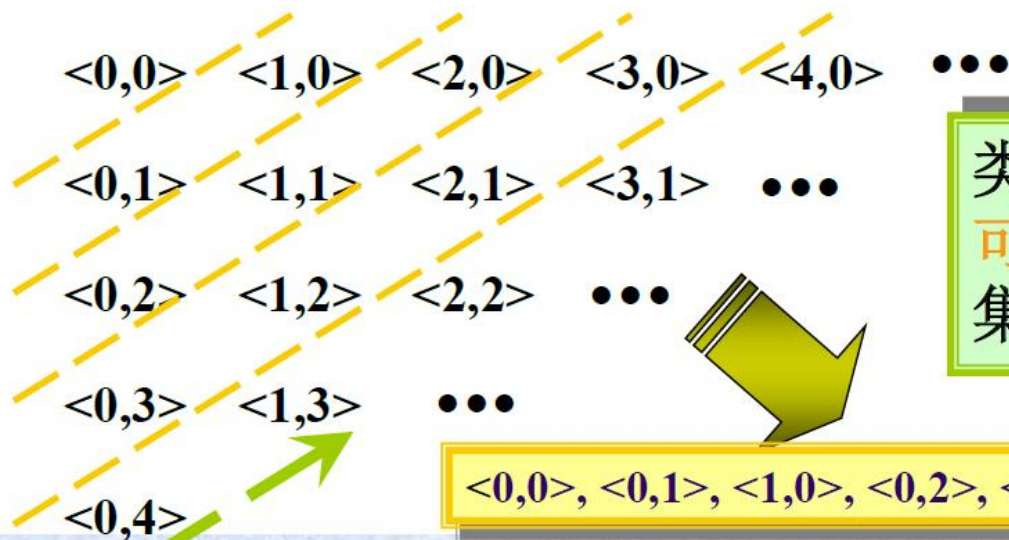
- 如果存在从 A 到自然数集合 N 的单射，则称 A 为可数集/可列集（ $\text{card } A \leq \aleph_0$ ）
 - ▣ 有限集均是可数集；无限集可分为可数集和不可数集
 - ▣ 与自然数集等势的集合称为无限可数集
 - ▣ 可数的直观含义：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出它的“前”、“后”元素是什么

如果能证明实数集 R 不可数，则说明 R 的基数 $\aleph$ 比 $\aleph_0$ 大

自然数集的笛卡儿积是可列集

13

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势



类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>,

$$l(m,n) = \sum_{i=1}^{m+n} i + (m+1) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + (m+1)$$

实数集不是可列集

14

□ $(0,1)$ 不是可列集 // $(0,1)$ 与实数集合等势

● “对角线证明法”

假设 $(0,1)$ 中的元素可以线性排列：

$0.\mathbf{b}_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\dots$

$0.b_{21}\mathbf{b}_{22}b_{23}b_{24}\dots$

$0.b_{31}b_{32}\mathbf{b}_{33}b_{34}\dots$

$0.b_{41}b_{42}b_{43}\mathbf{b}_{44}\dots$

$\vdots$

则 $0.b_1b_2b_3b_4\dots$ ($b_i \neq \mathbf{b}_{ii}$) 不含在上述序列中

□ 显然存在 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{R}$ 的单射，于是 $\mathbf{R}$ 的势大于 $\mathbf{N}$ 的势

幂集的基数

15

□ 实数集是最大的集合么？那么实数的幂集呢？

□ 证明：对任意集合 A ， $A \approx P(A)$

反设 A 与 $P(A)$ 等势，即存在双射函数 $f: A \rightarrow P(A)$ 。

构造集合 $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ 。

即， $B \in P(A)$ 是 A 的子集，且 B 中元素满足 $x \notin f(x)$ 。

下证 B 一定不在 f 的值域中，若成立则 f 非满射，矛盾。

反设 B 在 f 的值域中，则存在 $a \in A$ 满足 $B = f(a)$ 。

此时， $a \in B$ 等价于 $a \notin f(a)$ 等价于 $a \notin B$ ，矛盾。

□ 显然存在 A 到 $P(A)$ 的单射，于是 $P(A)$ 的势大于 A 的势

Cantor定理

16

■ Cantor 定理 (1891) :

(1) $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$

(2) 对于任意集合 A , $A \neq P(A)$

$P(\mathbb{N})$ 与 $\mathbb{R}$ 哪个更大?

本节提要

17

问题1：什么是集合的基数？

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是 $\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大？

- 实数集比自然数集大
- 任意集合的幂集比自身大

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小？

利用双射证明无限集等势

18

- $(0,1)$ 与整个实数集等势
 - 双射: $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数 $a, b (a < b)$, $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 等势
 - 双射: $f: [0,1] \rightarrow [a,b] : f(x) = (b-a)x + a$
(这实际上意味着: 任意长的线段与任意短的线段等势)
- 除此以外, 还可以通过**Bernstein**定理证明等势

集合的优势关系

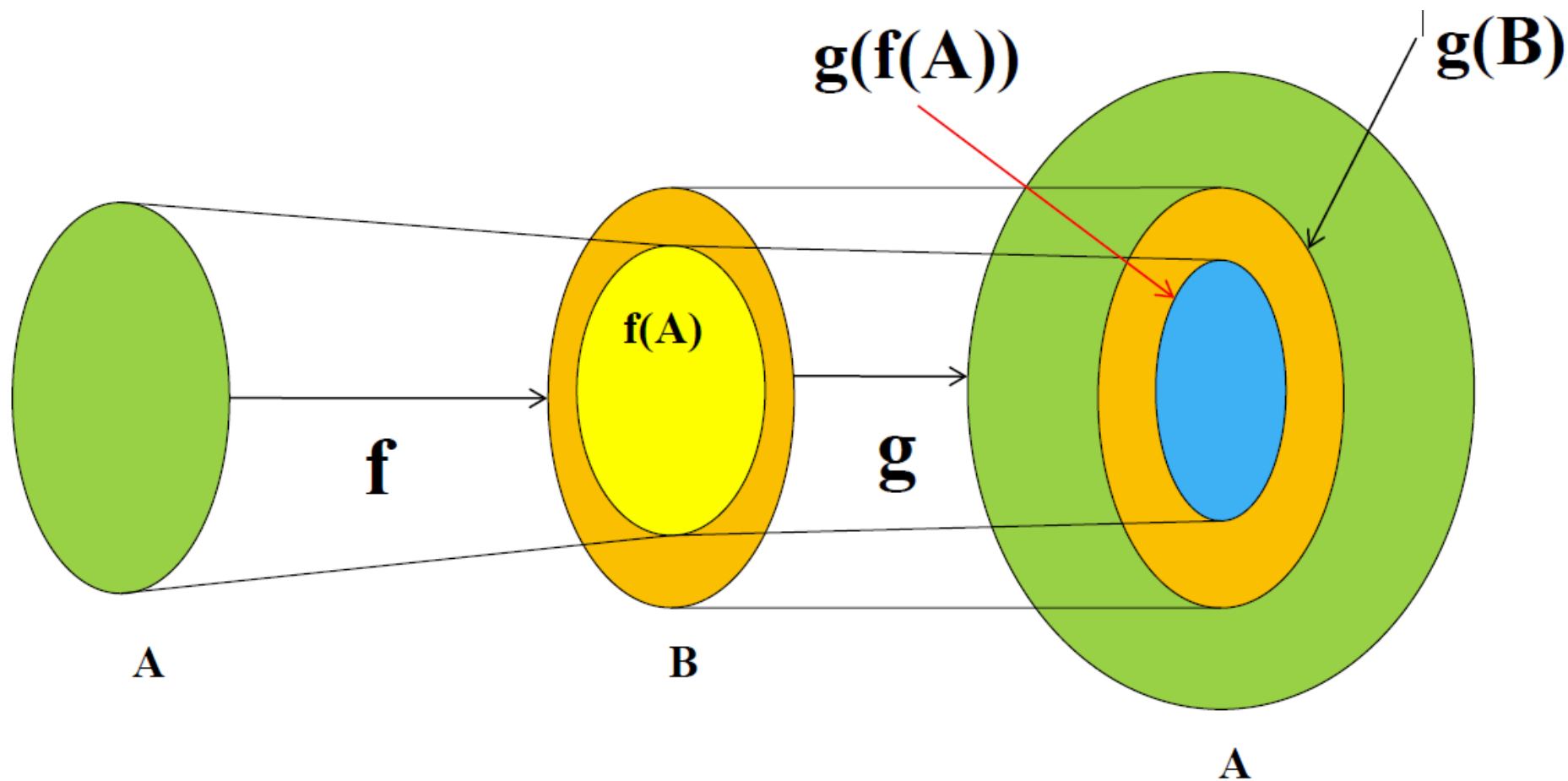
19

- 如果存在从集合A到集合B的**单射**，则称“集合B**优势于**集合A”，记为 $A \preceq \bullet B$
[card A $\leq$ card B]
- 如果集合B优势于集合A，且B与A不等势，则称“集合B**真优势于**集合A”，记为 $A \prec \bullet B$
[card A $<$ card B]
- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集**真优势于**集合A

Bernstein定理的证明

20

- 若 $A \preceq \bullet B$, 且 $B \preceq \bullet A$, 则 $A \approx B$ 。
- 由 $A \preceq \bullet B$ 可知, 存在从 A 到 B 的一对一函数 f , 同样, 由 $B \preceq \bullet A$ 可知, 存在从 B 到 A 的一对一函数 g , 于是: $g \circ f$ 是从 A 到 A 的一对一函数。
- 显然, $g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$, 且 f, g 的一对一性质保证了: $g(f(A)) \approx A, g(B) \approx B$ 。
- “三明治”引理可推出: $A \approx g(B)$, 从而 $A \approx B$ 。



$$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$$

$$g(f(A)) \approx A, g(B) \approx B$$

用Bernstein定理证明等势

23

- 证明实数集的两个子集 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 等势
 - ▣ 直接找双射不太容易

关键是如何安排在 $[0,1]$ 中但不在 $(0,1)$ 中的0和1。回想关于无限集合充要条件的证明，我们可以取 $(0,1)$ 的一个与自然数集合等势的子集(一定有) $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ，“腾出”前两个位置安排0和1

一种证法：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2^2} & x = 1 \\ \frac{1}{2^{n+2}} & x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots \\ x & x \text{ 为其它值} \end{cases}$$

用Bernstein定理证明等势

24

- 证明实数集的两个子集 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 等势
 - ▣ 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

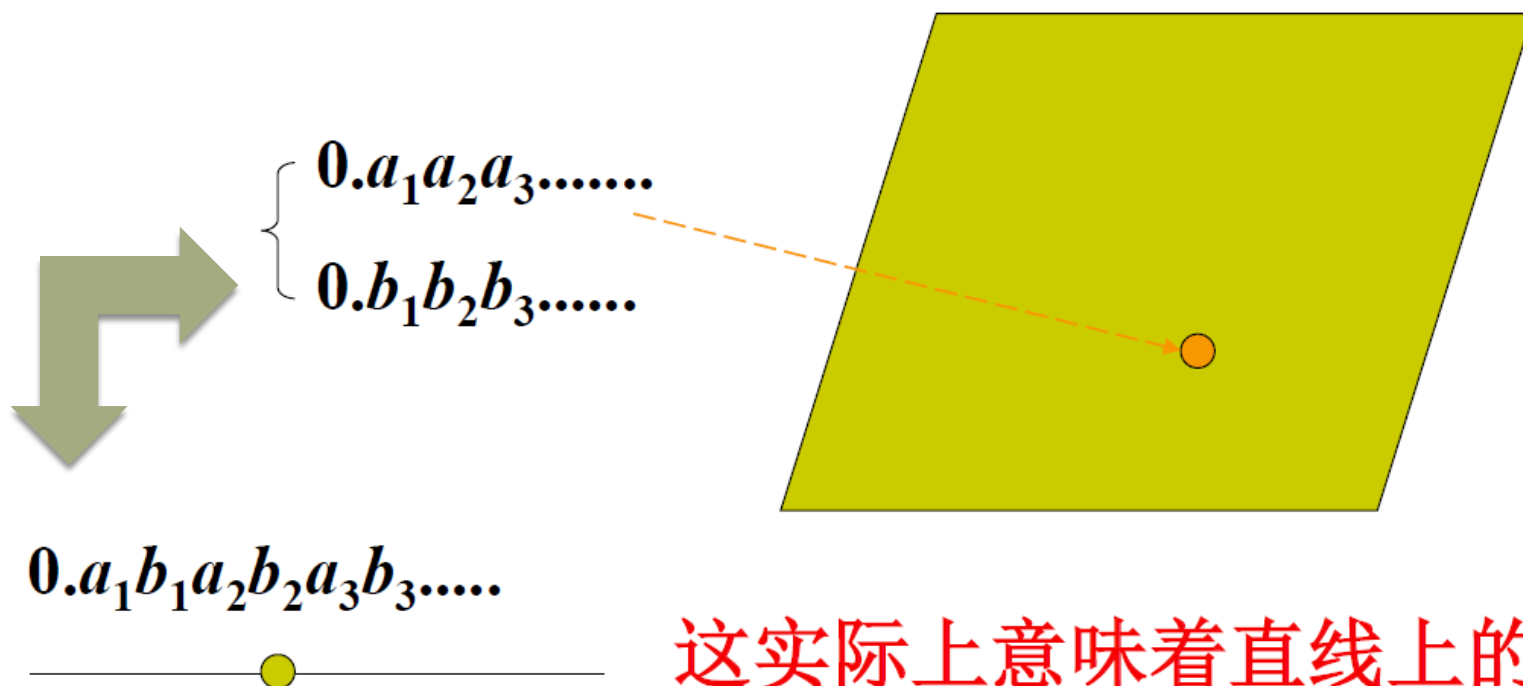
$$f : (0,1) \rightarrow [0,1] : f(x) = x$$

$$g : [0,1] \rightarrow (0,1) : g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \quad \text{注意: } g([0,1]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

用Bernstein定理证明等势

25

□ 直线上的点集与平面上的点集等势



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

关于 B^A

26

- B^A 是由定义域为 A 且伴域是 B 的函数组成的集合
- 若 $B=\{0,1\}$, $A=\{a,b,c\}$, 则 B^A 是有 8 个元素的集合:

$\{ \langle a,0 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle c,0 \rangle \}$

$\{ \langle a,1 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle c,0 \rangle \}$

$\{ \langle a,0 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle c,1 \rangle \}$

$\{ \langle a,1 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle c,1 \rangle \}$

$\{ \langle a,0 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle c,0 \rangle \}$

$\{ \langle a,1 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle c,0 \rangle \}$

$\{ \langle a,0 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle c,1 \rangle \}$

$\{ \langle a,1 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle c,1 \rangle \}$

- $\{0,1\}^N$? $\{0,1\}^N \approx P(N)$

用Bernstein定理证明等势

27

□ 实数集与 $\rho(\mathbf{N})$ 等势

- $[0, 1) \approx \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ 从而 $\mathbf{R} \approx \rho(\mathbf{N})$
 - $[0, 1)$ 中的数唯一地表示为 $0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ (二进制表示)
不容许连续无数个1, 比如 $1/2=0.1000\ldots$ (**NOT** $0.0111\ldots$)
 - $f: [0, 1) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$
 $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \rightarrow b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$
 f 是单射
 - $g: \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \rightarrow [0, 1)$
 $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \rightarrow 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数
 g 是单射
 - 根据Bernstein定理, 得证

重要的等势、优势关系

28

- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \approx [a, b] \approx (c, d) \approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{N}) \approx (0, 1)$
- $\{0, 1\}^A \approx P(A)$
- $\mathbb{N} < \cdot \mathbb{R}$
- $A < \cdot P(A) < \cdot PP(A) < \cdot \cdots$

连续统假设

29

Continuum hypothesis, 简称CH

不存在集合S:

$$\aleph_0 < \text{card } S < \aleph$$

不存在一个基数绝对大于可数集而绝对小于实数集的集合。

库尔特·哥德尔在**1940**年证明了**CH**与**ZFC**的相对协调性（无法以**ZFC**证明为误），保罗·柯恩在**1963**年证明了连续统假设不能由**ZFC**推导。也就是说连续统假设独立于**ZFC**。

本节小结

30

问题1：什么是集合的基数？

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是 $\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大？

- 实数集比自然数集大
- 任意集合的幂集比自身大

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小？

- 利用双射函数证明等势
- 利用 **Bernstein** 定理证明等势

作业

- 见课程网站

集合优势关系的性质

32

- 自反性：恒等函数
- 若 $A \leq \bullet B$ ，且 $B \leq \bullet A$ ，则 $A \approx B$ (比较:反对称性)
(Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

等势关系是一种等价关系

33

等势关系是等价关系



- 自反性: $I_A: A \rightarrow A$
- 对称性: 如果 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 f 的反函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 也是双射。
- 传递性: 如果 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 均是双射, 则 $g \circ f$ 是从 A 到 C 的双射。
- 例子
 - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

God made the integers; all else is the
work of man.

—— **Leopold Kronecker**

