

关系与函数

回顾

问题1：什么是集合？

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些？

- 子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明？

- 集合的交并补、对称差、广义并、广义交
- 集合定义、恒等式、逻辑推演等

本节提要

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

笛卡尔积(回顾)

4

□ 对任意集合 A, B

笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

▣ 例: $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a),$
 $(1, b), (2, b), (3, b)\}$

□ $A = \{1, 2\}$, $P(A) \times A = ?$

□ $|A| = m$, $|B| = n$, $|A \times B| = ?$

▣ 若 A, B 是有限集合, 则 $|A \times B| = |A| \times |B|$

二元关系

5

- 若 A, B 是集合, 从 A 到 B 的一个关系 R 是 $A \times B$ 的一个子集. ($R \subseteq A \times B$)
 - 关系是集合, 可以是空集 (空关系)
 - 集合的元素是有序对
- 若 $A=B$: 称为 “集合 A 上的 (二元) 关系”
- 例如: 常用的数学关系 (不大于、整除、集合包含)、网页链接、文章引用、相互认识
- n 元集合上有多少种不同的关系?

二元关系

6

- 相关记号：令 $R \subseteq A \times B$
 - ▣ $(a, b) \in R$ 可简记为 aRb
 - ▣ $(a, b) \notin R$ 可简记为 $\neg aRb$ 或者 $a \not R b$
 - ▣ $aRb \wedge bRc$ 可简记为 $aRbRc$

特殊的二元关系

7

- 集合 A 上的空关系 $\emptyset$: 空关系即空集
- 全域关系 $E_A: E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 $I_A: I_A = \{ (x, x) \mid x \in A \}$
- 函数 $f: A \rightarrow B$

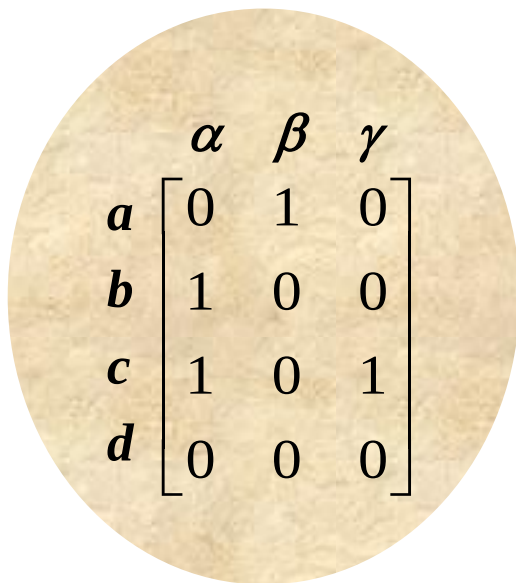
$R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$ 是一个从 A 到 B 的一个关系

关系的表示

8

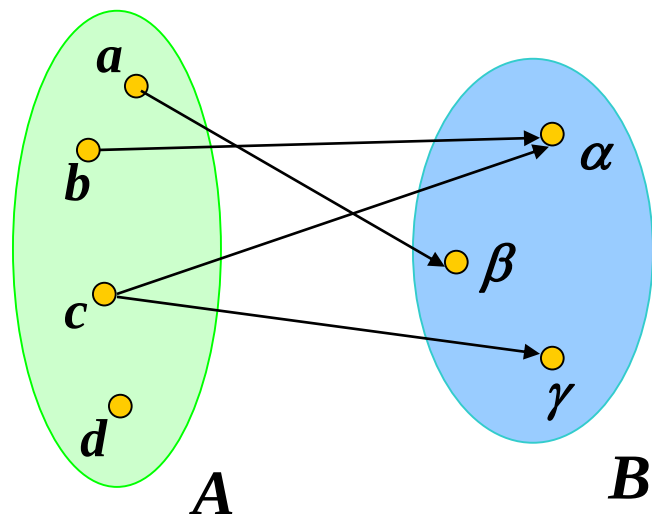
- 假设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合
- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha), (c, \gamma)\}$

0-1矩阵



	α	β	γ
a	0	1	0
b	1	0	0
c	1	0	1
d	0	0	0

有向图



二元关系和有向图

9

关系 $R \subseteq A \times B$ $\longleftrightarrow$ 有向图 (V_D, E_D)

A 和 B 是集合

有序对集合

$(x, y) \in R$

若 $A=B$, R 中存在序列: $(x_1, x_2),$
 $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集 E_D

从 x 到 y 有一条边

图 D 中存在从 x_1 到 x_n 的长
度为 $n-1$ 的通路

关系的运算(1)

10

□ 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用

□ 例:

- 自然数集合上: “ $<$ ” $\cup$ “ $=$ ” 等同于 “ $\leq$ ”
- 自然数集合上: “ $\leq$ ” $\cap$ “ $\geq$ ” 等同于 “ $=$ ”
- 自然数集合上: “ $<$ ” $\cap$ “ $>$ ” 等同于 $\emptyset$

关系的运算(2)

11

□ 与定义域和值域有关的运算

- $\text{dom } R = \{x \mid \exists y (x,y) \in R\}$

- $\text{ran } R = \{y \mid \exists x (x,y) \in R\}$

- $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

- $R \upharpoonright A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge (x,y) \in R\} \subseteq R$ *restriction* 也记作 $R \upharpoonright A, R|A$

- $R[A] = \{y \mid \exists x (x \in A \wedge (x,y) \in R)\} = \text{ran}(R \upharpoonright A) \subseteq \text{ran } R$

□ 例：

- $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,3,5,6\}, A$ 上关系 R :

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,5), (5,2)\},$$

$$\text{求 } R \upharpoonright B, R[B]$$

关系的运算(3)

12

□ 逆运算

□ $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$

■ 注意:如果 R 是从 A 到 B 的关系,则 R^{-1} 是从 B 到 A 的。

□ $(R^{-1})^{-1} = R$

□ 例子: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

■ $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$

$\Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \text{ 或 } (y, x) \in R_2$

$\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} \text{ 或 } (x, y) \in R_2^{-1}$

关系的运算(4)

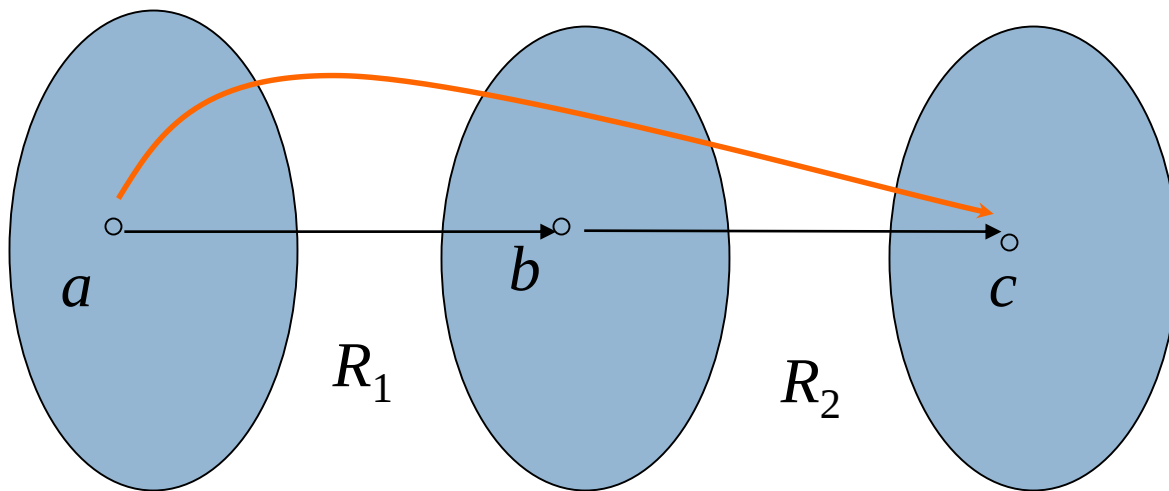
13

□ 关系的复合（合成, Composition）

设 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$,

R_1 与 R_2 的复合（合成），记为 $R_2 \circ R_1$, 定义如下：

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \}$$



例：关系的复合运算

14

□ 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系，其中：

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$$

则：

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c)\}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$$

$$R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$

关系的复合运算的性质

15

□ 结合律

□ 给定 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_3 \subseteq C \times D$, 则：

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

□ 证明左右两个集合相等

□ 复合关系的逆关系

□ 给定 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

□ 同样，证明左右两个集合相等

关系的复合运算的性质

16

□ 对集合并运算满足分配律

▣ 给定 $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$, $H \subseteq B \times C$, 则:

$$(G \cup H) \circ F = (G \circ F) \cup (H \circ F)$$

□ 对集合交运算: $(G \cap H) \circ F \subseteq (G \circ F) \cap (H \circ F)$

▣ 注意: 等号不一点成立。

$$A = \{a\}, B = \{s, t\}, C = \{b\};$$

$$F = \{(a, s), (a, t)\}, G = \{(s, b)\}, H = \{(t, b)\};$$

$$G \cap H = \emptyset, (G \circ F) \cap (H \circ F) = \{(a, b)\}$$

0-1 矩阵运算

17

□ 令0-1矩阵 $M_1=[a_{ij}]$, $M_2=[b_{ij}]$:

□ $C=M_1 \wedge M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=b_{ij}=1$

□ $C=M_1 \vee M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=1$ 或 $b_{ij}=1$

□ 令 $r \times s$ 矩阵 $M_1=[a_{ij}]$; $s \times t$ 矩阵 $M_2=[b_{ij}]$:

□ $C=M_1 \otimes M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $\exists k(a_{ik}=1 \wedge b_{kj}=1)$

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系运算的矩阵法

18

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

证明:

令 $R_1: X \rightarrow Y; R_2: Y \rightarrow Z$;

令 $A = M_{R_1}$, $B = M_{R_2}$, $C = M_{R_2 \circ R_1}$, $D = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$ 有

$$\begin{aligned} c_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y (\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2) \\ &\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1 \end{aligned}$$

For $n \geq 2$, and R a relation on a finite set A , we have

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \cdots \otimes M_R \quad (n \text{ factors})$$

本节提要

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

函数

20

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合 A 到 B 的函数 f 是对元素的一种指派，对 A 的每个元素恰好指派 B 的一个元素。记作 $f:A \rightarrow B$ 。
- $f:A \rightarrow B$: 函数的型构
- f 的定义域 (domain) 是 A , f 的伴域 (codomain) 是 B
- 如果 f 为 A 中元素 a 指派的 B 中元素为 b , 就写成 $f(a)=b$ 。此时, 称 b 是 a 的像, 而 a 是 b 的一个原像。
- A 中元素的像构成的集合称为 f 的值域 range (f 的像 image) 。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数是一种特殊的关系

- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
 - 对于 A 中的每个元素 a , B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb

则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

如何用逻辑公式表达上述“有且仅有一个”条件？

$$(\forall x, y, z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

函数举例

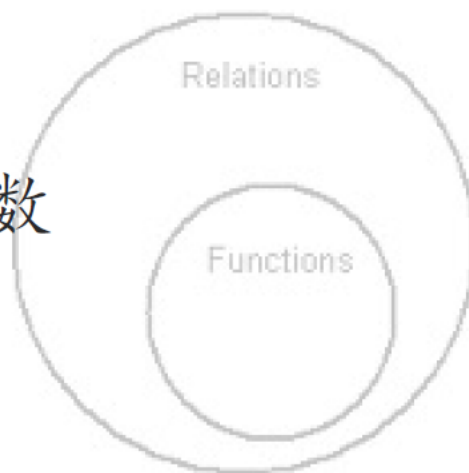
22

■ 例：

$F_1 = \{(1, 2), (3, 2)\}$ 为函数

$F_2 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ 不为函数

$F_3 = \emptyset$ 为函数



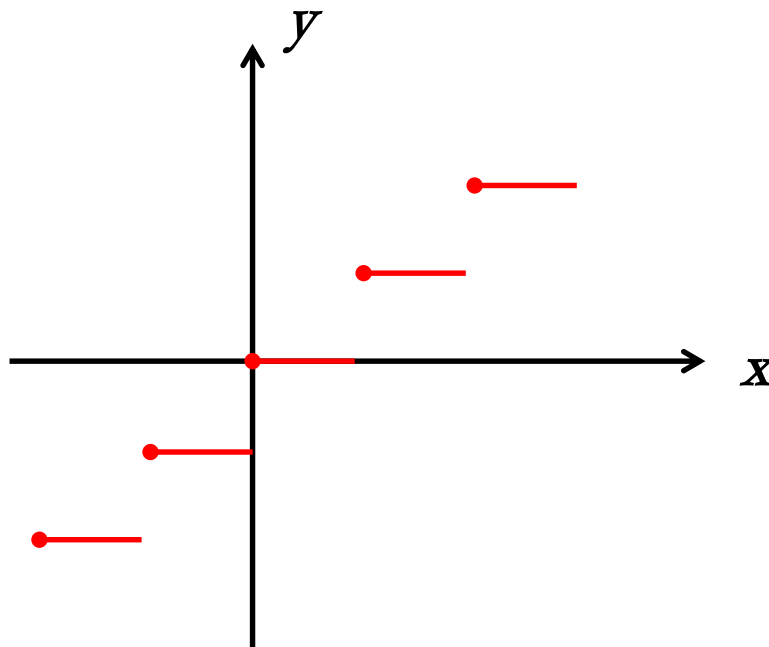
函数举例

□ 下取整函数 $\lfloor x \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

Java Program

```
int floor(float real) { $\cdots$ }
```

float: float $\rightarrow$ int



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in A \wedge f(a) = b\}$

函数举例

□ 某课程成绩

Program

CourseGrade grade(StudentName sname, CourseName cname) {...}

Function:

Grade: StudentName × CourseName → CourseGrade

函数原型/声明

函数型构
(signature)

姓名	课程	成绩
张明	离散数学	A
李宁	程序设计	B
王琴	数据结构	A
...	...	...

函数举例

- 设 A 为非空集合, A 上的 恒等函数 $\iota_A: A \rightarrow A$ 定义为
 - $\iota_A(x) = x, x \in A$
- 设 U 为非空集合, 对任意的 $A \subseteq U$, 特征函数 $\chi_A: U \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为:
 - $\chi_A(x) = 1, x \in A$
 - $\chi_A(x) = 0, x \in U - A$

函数的相等

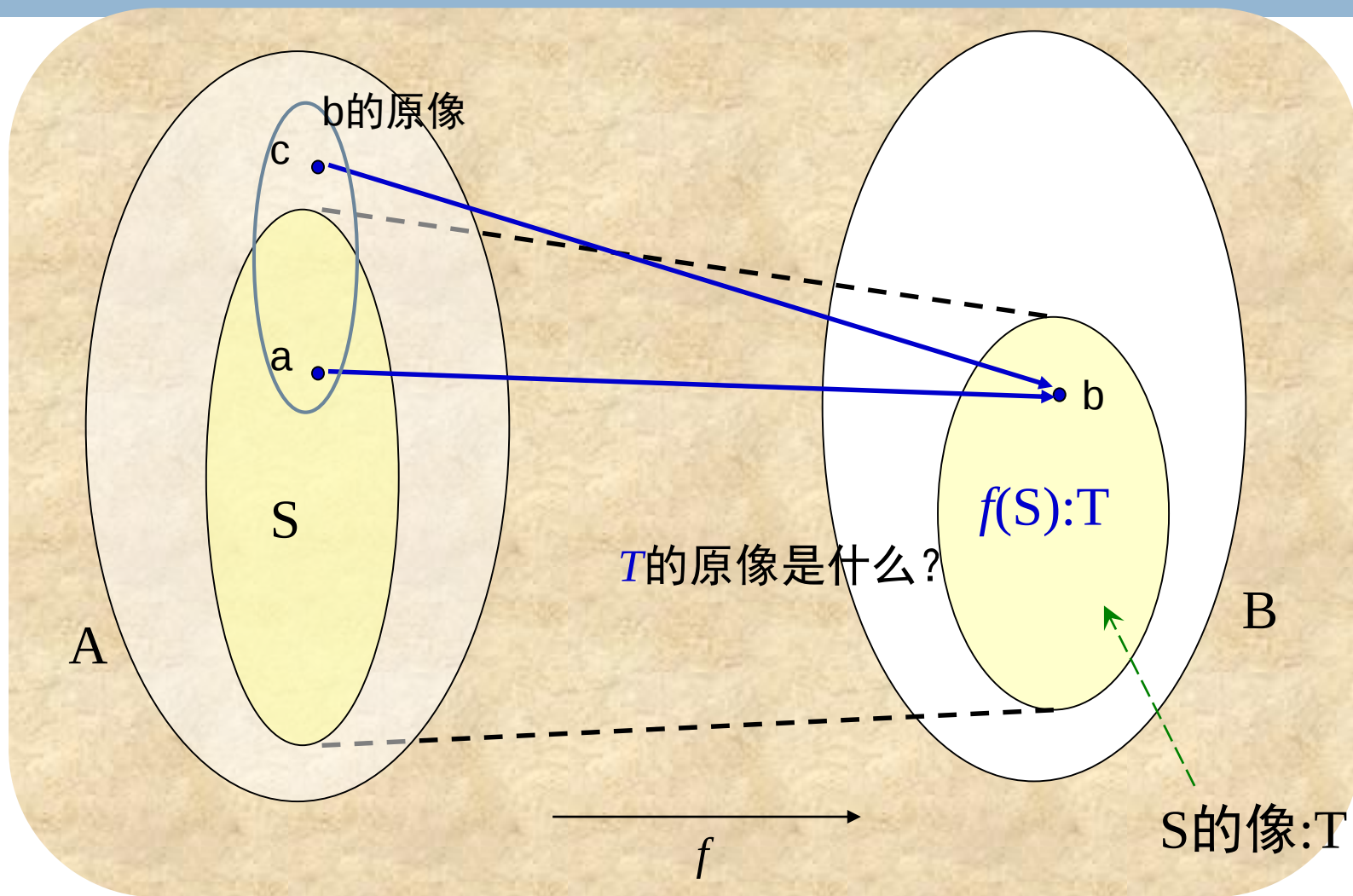
- 函数相等 $f=g$ if
 - $\text{dom}(f)=\text{dom}(g)$
 - $\text{codom}(f)=\text{codom}(g)$
 - $\forall x(x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$

- 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有多少个？

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合 A 到 B 的函数， S 是 A 的一个子集。
 S 在 f 下的像，记为 $f(S)$ ，定义如下：
 - $f(S) = \{ t \mid \exists_{s \in S} t = f(s) \}$
- 备注： $f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和原像



并集的像

- 设函数 $f: A \rightarrow B$, 且 X, Y 是 A 的子集, 则

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$$

- 证明:

- $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X \cup Y)$, 则存在 $s \in X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$; 假设 $s \in X$, 则 $t \in f(X)$, 假设 $s \in Y$, 则 $t \in f(Y)$, $\therefore t \in f(X) \cup f(Y)$

- $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X) \cup f(Y)$

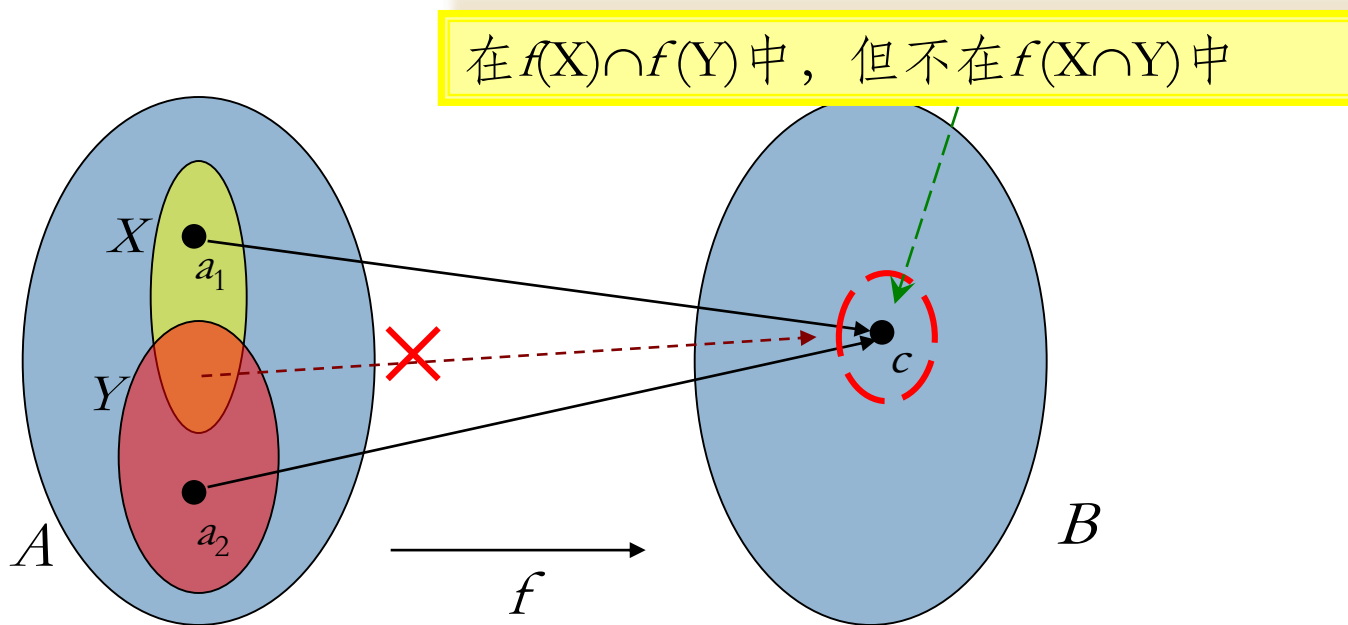
情况1: $t \in f(X)$, 则存在 $s \in X \subseteq X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$, $\therefore t \in f(X \cup Y)$

情况2: $t \in f(Y)$, 同样可得 $t \in f(X \cup Y)$

$\therefore t \in f(X \cup Y)$

交集的像

- 设函数 $f: A \rightarrow B$ ，且 X, Y 是 A 的子集，则
 - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$



特殊类型的函数

- $f:A \rightarrow B$ 是 **单射**（一对一的）
 - injection, injective function, one-to-one function
 - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 - //等价的说法: $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$
- $f:A \rightarrow B$ 是 **满射**（映上的）
 - surjection, surjective function, onto function
 - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得 $f(x) = y$
 - //等价的说法: $f(A) = B$, 伴域=值域
- $f:A \rightarrow B$ 是 **双射**（一一对应）
 - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
 - 满射+单射

例：特殊类型的函数

- $f:R \rightarrow R, f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- $f:Z^+ \rightarrow R, f(x) = \ln x,$ 单射
- $f:R \rightarrow Z, f(x) = \lfloor x \rfloor,$ 满射
- $f:R \rightarrow R, f(x) = 2x - 1,$ 双射
- $f:R^+ \rightarrow R^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$
- $f:R \times R \rightarrow R \times R, f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle,$ 双射
- $f:N \times N \rightarrow N, f(\langle x, y \rangle) = |x^2 - y^2|$

例：特殊类型的函数

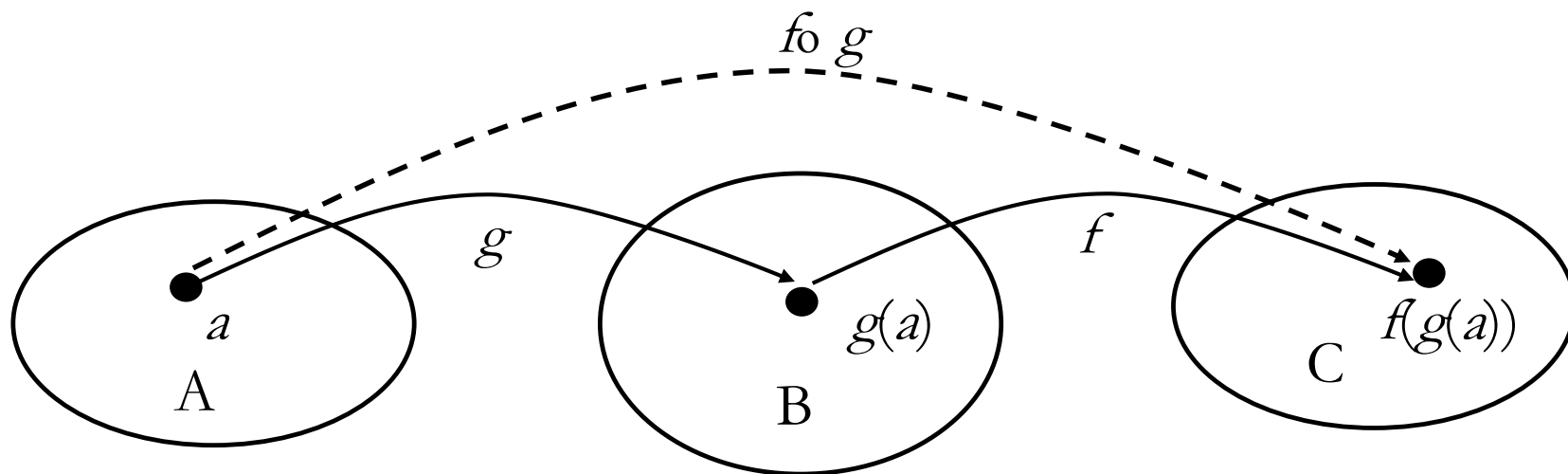
- 判断 $f: R \times R \rightarrow R \times R, f(\langle x, y \rangle) = \langle x+y, x-y \rangle$ 的性质
- 单射?
 - ▣ 令 $f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$
 - $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ 且 $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ 易见: $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$
 - $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$
- 满射?
 - ▣ 任取 $\langle a, b \rangle \in R \times R$, 总存在 $\langle (a+b)/2, (a-b)/2 \rangle$, 使得
 - ▣ $f(\langle (a+b)/2, (a-b)/2 \rangle) = \langle a, b \rangle$

反函数

- 设 f 是从A到B的一一对应， f 的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素 b 的是A中满足 $f(a)=b$ 的（唯一的） a 。 f 的反函数记作 f^{-1} 。
 - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
 - 任何函数都有反函数吗？
 - 函数 f 存在反函数当且仅当 f 是双射函数
- 例子
 - $f:R \times R \rightarrow R \times R, f(\langle x, y \rangle) = \langle x+y, x-y \rangle$
 - $f^{-1}:R \times R \rightarrow R \times R, f^{-1}(\langle x, y \rangle) = \langle ?, ? \rangle$

函数的复合

- 设 g 是从 A 到 B 的函数， f 是从 B 到 C 的函数， f 和 g 的复合用 $f \circ g$ 表示，定义为：
 - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $x \in A$



复合运算的性质

□ 函数的复合满足结合律

□ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

□ 满射的复合是满射

□ 单射的复合是单射

□ 双射的复合是双射

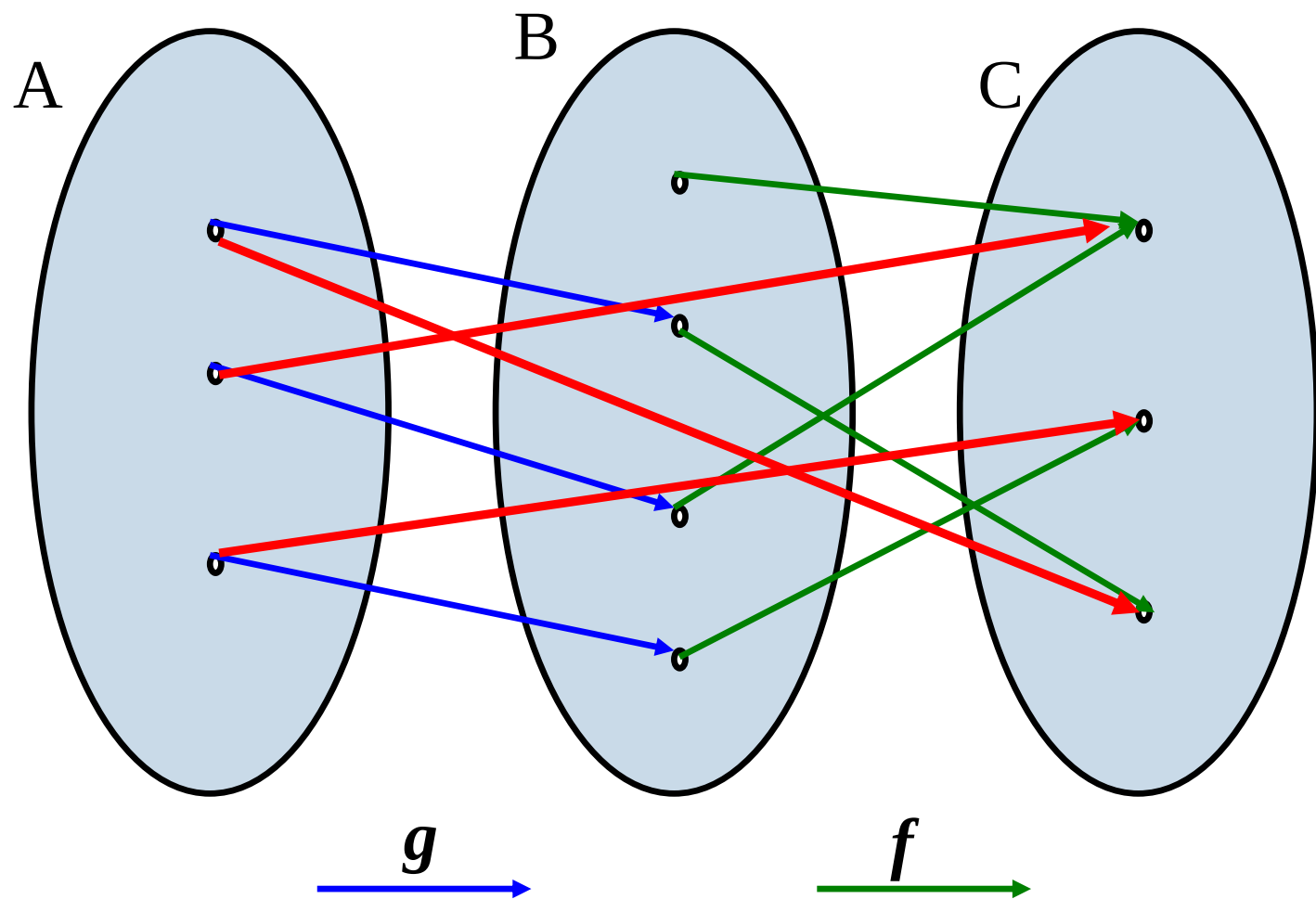
□ 设 f 是从 A 到 B 的双射

□ $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$

□ $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$

但是...

- 若 $f \circ g$ 是满射，能推出 f 和 g 是满射吗？
 - f 一定是满射， g 不一定是满射。
- 若 $f \circ g$ 是单射，能推出 f 和 g 是单射吗？
 - g 一定是单射， f 不一定是单射。



递增（递减）函数

- 设 f 的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- f 是递增的
 - ▣ $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$
- f 是严格递增的
 - ▣ $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$

例

- 自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2+1$ 的任何一种排列中，必然含一个长度不小于 $n+1$ 的严格递增链或严格递减链。
 - $7, 4, 3, 5, 2, 1, 9, 8, 6, 10, //, //, //, //, //, //, 10, 3, 2, 6, 4, 7, 5, 9, 1, 8$
 - 在所给的序列中，以 k 开始的严格递增序列长度为 $I(k)$ ，以 k 开始的严格递减序列长度为 $D(k)$ 。
 - $f: k \rightarrow (I(k), D(k)), k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$
 - $f(7)=(3, 5), f(4)=(4, 4), f(3)=(4, 3), f(5)=(3, 3), f(2)=(3, 2), f(1)=(3, 1)$
 - $f(9)=(2, 3), f(8)=(2, 2), f(6)=(2, 1), f(10)=(1, 1)$
 - f 是单射：对于 $k_1 < k_2$ ，如果 k_1 排在 k_2 前面，则 $I(k_1) > I(k_2)$ ，如果 k_2 排在 k_1 前面，则 $D(k_2) > D(k_1)$ 。
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于 n ：
 - f 的值域最多有 n^2 个元素
 - f 不可能是单射

本节小结

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

- 函数是特殊的关系（所有定义域元素唯一指派）；单射满足若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $x_1 = x_2$ ，满射满足 $f(A) = B$ ；反函数、复合函数

作业

- 见课程网站