集合及其运算

回顾

问题1：什么叫证明?

- 表明定理为真的有效论证（演绎推理）

问题2：常见的证明方法有哪些?

- 直接证明、间接证明、归谬法、分情形证明、等价性证明、存在性证明、唯一性证明

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想?

- 尚未被证明的可能为真的陈述：费马大定理、四色定理、哥德巴赫猜想、庞加莱定理、黎曼猜想

本节提要

问题1：什么是集合?
问题2：集合的基本概念有哪些?
问题3：如何进行集合运算与集合公式证明?

引言

- 集合论是现代数学的基础理论
  - 集合、关系、函数、无穷等
- 1900年国际数学大会
  - H. Poincare:“借助集合论…可以建造数学大厦…今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了!”
- 随后发现了Cantor集合论中的一些悖论
  - 如1901年的罗素悖论：“要给所有不自己理发的人理发，不给所有自己理发的人理发”
  - G. Frege评论：当大厦竣工时基础却动摇了

罗素悖论

- 罗素悖论：$\{x\,|\,P(x)\}$未必产生集合，令$R=\{x\,|\,x\notin x\}$，则若R为集合则$R\in R\leftrightarrow R\notin R$矛盾，故$R$不为集合
  - 考虑一切集合的集合A，这个集合A本身也是集合，所以属于本身A
  - 除A以外的集合构成集合$R=\{x|x\notin x\}$，R表示不属于自己的集合的集合：若集合R属于R，根据定义R不属于R；若R不属于R，根据定义R属于R。即这样的集合R不存在。
  - 这与朴素集合论的概括原则相矛盾

公理化集合论

危机的解决：

公理化集合论

在朴素集合论基础上，通过公理对集合加以限制。
例如：ZF公理化集合论的正则公理避免了罗素悖论

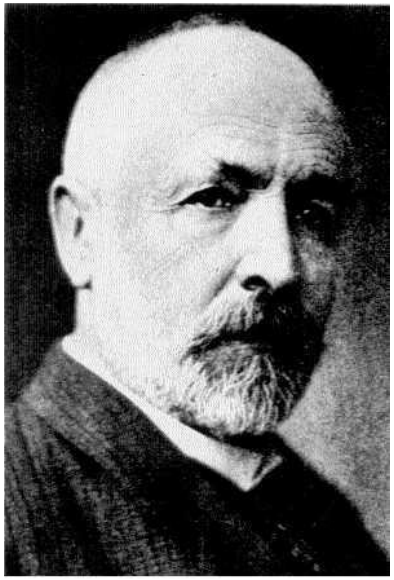
正则公理：每一个非空集合x，总包含着一元素y，使x与y为不相交。
对于集合x，根据正则公理有：{x}里面有一个元素跟{x}交集为空，即$x \cap \{x\} = \emptyset$，即$x \notin x$。

集合的概念

- 集合没有明确的定义，**G.Cantor**给出了一种刻划：

"吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。
通常用大写字母表示集合，如A、B、C等，用小写字母表示元素，如a、b、c等。若集合A系由a、b、c等诸元素所组成，则表如$A=\{a,b,c,\cdots\}$，而a为A之元素，亦常用$a\in A$之记号表之者，a非A之元素，则记如$a\notin A$。"

（肖文灿译于1939年，《集合论初步》，商务印书馆）



例

- 1,2,3为集合，“自然数之全体”为集合；但诸如“甚大之数”或“与P点接近之点”则不能为集合，因其界限不清

- 集合中的元素互异，我们把元素的重复看作一次出现，如{2,2,3,3}={2,3}

- Cantor提到的“总括之全体”之“总括”，可由集合的外延公理和概括原则来描述

外延公理与概括原则

- (ZF.1)外延公理：集合由其元素完全决定

$$A=B\leftrightarrow\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

故证明集合$A=B$只需证明$\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

- 概括原则：对于人们直观或者思维之对象x的任一性质$P(x)$，存在集合S的元素恰为具有性质P的那些对象，记为$S=\{x\mid P(x)\}$。从而对任何a，$a\in S\leftrightarrow P(a)$，例如$\{1,2,3\}=\{x\mid x=1\lor x=2\lor x=3\}$

本节提要

问题1：什么是集合?

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些?

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明?

集合的大小

- 有限集合及其基数
  - 若S恰有n个不同的元素，n是自然数，就说S是有限集合，而n是S的基数，记作$|S|=n$
- 无限集合
  - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

子集

- A为B之子集（记为$A\subseteq B$）指$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$，
- A为B之真子集（记为$A\subset B$）指$A\subseteq B$且$A\neq B$。
- $A\not\subseteq B$是指$\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$
- 例：$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$，$A\subseteq A$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$
- 命题：$A=B\leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$
  - 该命题也常被用来证明集合相等

空集

- (ZF.3*)空集公理：存在一个集合其没有任何元素，称这种集合为空集（null set），记作$\emptyset$，其为任何集合（包含空集本身）之子集

- 命题：空集是唯一的
  - 证明：设$\emptyset_1,\emptyset_2$皆为空集，则根据空集的定义，有$\emptyset_1\subseteq\emptyset_2\wedge\emptyset_2\subseteq\emptyset_1$，根据集合相等的定义有$\emptyset_1=\emptyset_2$

空集

- 空集本身是一个集合，也可以做为另一个集合的元素或子集，故：$\emptyset \in \{\emptyset\}$，$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$；但因为空集不含任何元素，故$\emptyset \notin \emptyset$，$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

- 定义：若集合A含有n个元素，则称A为n元集，记为$|A|=n$；易见，$\emptyset$是0元集，$\{\emptyset\}$是1元集

由集合定义自然数

- 在公理集合论中，集合是自然数的基础
  - 定义：设$\boldsymbol{a}$为集合，称$\boldsymbol{a}\cup\{\boldsymbol{a}\}$为$\boldsymbol{a}$的后继，记作$\boldsymbol{a}$+
  - 定义(von Neumann)：

    $$令\ 0=\emptyset, 1=0^{+}, 2=0^{++}, \cdots, n=0^{\overbrace{+\cdots+}^{n}}$$

  - 定义：设$\boldsymbol{A}$是集合，称$\boldsymbol{A}$为归纳集(inductive set)指：$\emptyset\in\boldsymbol{A}\wedge(\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\in\boldsymbol{A})$

无穷公理

- **(ZF.7)无穷公理：** $\exists A(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A))$

- 按照**von Neumann**的定义，**0=∅**，n**+1=**n**+**，从而可以定义出单个的自然数，但不能说明全体自然数集合**N**的存在性，而由无穷公理可以定义**N**

  定义：$\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \cap \{A|A\text{为归纳集}\} =$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \cdots\}$$

有关自然数的若干命题

- 对于自然数的von Neumann定义，可定义：

  $m \leq n \stackrel{\text{def}}{=} m \subseteq n$，于是有以下命题成立：

  - (1) $n+1=\{0,1,2,\cdots,n\}$
  - (2) $n \in n+1$
  - (3) $n \leq n$
  - (4) $n \leq m \leq 1 \rightarrow n \leq 1$； $n \leq m \leq n \rightarrow n=m$
  - (5) $m \leq n \vee n \leq m$

幂集

- (ZF.8)幂集公理：集合A的幂集$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$,即由集合$A$的全体子集构成的集合
  - 例：$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$，$PP(\emptyset)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，$PPP(\emptyset)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$，$P(\{a,b\})=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
- 若$|A|=n$，则$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

  故集合A的幂集的另一种记法为2^A
- 若$P(A)\subseteq P(B)$，则$A\subseteq B$

$\mathcal{P}(X)$
$\mathfrak{P}(X)$
$\mathscr{P}(X)$
$\wp(X)$
$\mathbb{P}(X)$
$\mathrm{P}(X)$

笛卡尔积

- 集合元素是无序的，如何表达有序的聚集?
- 有序n元组($a_1,a_2,\ldots,a_n$)，下标代表元素位置
  - 两个有序n元组相等当且仅当每一对对应的元素都相等
- 定义：集合A和B的笛卡尔积用A×B表示：

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B)\}$$

  - 注：笛卡尔积A×B的子集R是集合A到集合B的关系
  - 注：笛卡尔积可以扩展到多个集合：

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1, a_2,\ldots, a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\ldots n\}$$

  - 注：A×B×C与(A×B)×C不同

笛卡尔积

- 考察有序偶
  - 有序偶(a,b)=(x,y) 当且仅当 a=x, b=y
  - 通过集合定义：(a,b)={{a},{a,b}}
  - 注： A×B与B×A不同。何种情形下，A×B=B×A?
  - 性质：
    - (1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
    - (2) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)]$
    - (3) 分配律：$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

      $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

      $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

      $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

Cogito, ergo sum.
吾思故吾在
—René Descartes†
[法]笛卡尔

本节提要

问题1：什么是集合?

\-　集合无定义，通过外延法、概括法描述

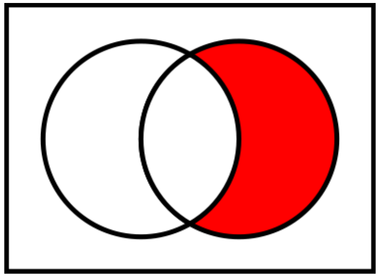
问题2：集合的基本概念有哪些?

\-子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明?

集合运算

- 为了由已有集合产生新的集合，除幂集运算外还引入一些集合上的运算
- 定义：
  - (ZF.5)集合的并：$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\vee x\in B\}$
  - 集合的交：$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$
  - 集合的相对补：$A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$
  - 集合的对称差：

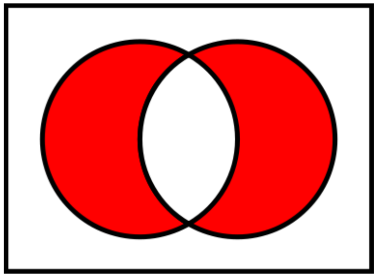


$$A\oplus B=\{x\,|\,(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

$$=(A-B)\cup(B-A)$$

例

- 试证明对称差$A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$



证明：根据对称差定义，$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$，任取$x \in A \oplus B$，即$x \in (A-B)$或$x \in (B-A)$.

- 1. 假设$x \in (A-B)$，根据相对补定义，有$x \in A$且$x \notin B$，故而$x \in (A \cup B)$但$x \notin (A \cap B)$，根据相对补定义，有$x \in (A \cup B)-(A \cap B)$；
- 2. 假设$x \in (B-A)$，根据相对补定义，有$x \in B$且$x \notin A$，故而$x \in (A \cup B)$但$x \notin (A \cap B)$，根据相对补定义，亦有$x \in (A \cup B)-(A \cap B)$.

综上，对于任意$x \in A \oplus B$，皆有$x \in (A \cup B)-(A \cap B)$，反之亦然（需要加入证明内容）。由集合相等定义，$A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$. □

广义交和广义并

- 定义（广义交与广义并）：
  - 集合的广义并：设A为集合，A的所有元素的并称为集合A的广义并，记为：
    $\cup A=\{x \mid \exists y(y \in A) \wedge (x \in y)\}$
  - 集合的广义交：设A为非空集合，A的所有元素的交称为集合A的广义交，记为：
    $\cap A=\{x \mid \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$
    - 注：限制条件为A非空，$\cap\emptyset$无意义

例

- 设 $\mathcal{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a,b\}\}$, $\mathcal{A}_3=\{a\}$,
  $\mathcal{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\mathcal{A}_5=a(a\neq\varnothing)$, $\mathcal{A}_6=\varnothing$, 则

$\cup\mathcal{A}_1= a\cup b\cup\{c,d\}$, $\cap\mathcal{A}_1= a\cap b\cap\{c,d\}$,

$\cup\mathcal{A}_2=\{a,b\}$, $\cap\mathcal{A}_2=\{a,b\}$,

$\cup\mathcal{A}_3=a$, $\cap\mathcal{A}_3=a$

$\cup\mathcal{A}_4=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, $\cap\mathcal{A}_4=\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$,

$\cup\mathcal{A}_5= \cup a$, $\cap\mathcal{A}_5= \cap a$

$\cup\mathcal{A}_6=\varnothing$, $\cap\mathcal{A}_6=E$ (或者无定义)

空集的广义交不是一个集合

Theorem

Consider the set of sets $\mathbb{S}$ such that $\mathbb{S}$ is the empty set $\varnothing$.

Then the intersection of $\mathbb{S}$ is $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{S} = \varnothing \implies \bigcap \mathbb{S} = \mathbb{U}$$

where $\mathbb{U}$ is the universe.

A paradoxical result.

Proof

Let $\mathbb{S} = \varnothing$.

Then from the definition:

$$\bigcap \mathbb{S} = \{x : \forall X \in \mathbb{S} : x \in X\}$$

Consider any $x \in \mathbb{U}$.

Then as $\mathbb{S} = \varnothing$, it follows that:

$$\forall X \in \mathbb{S} : x \in X$$

from the definition of vacuous truth.

It follows directly that:

$$\bigcap \mathbb{S} = \{x : x \in \mathbb{U}\}$$

That is:

$$\bigcap \mathbb{S} = \mathbb{U}$$

$\blacksquare$

最小上界和最大下界

- 包含关系下两个集合的最小上界和最大下界
  - 最小上界：
    - $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ ----A和B的上界
    - 对任意X，若$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，则$A \cup B \subseteq X$ ----最小上界
  - 最大下界：
    - $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ ----A和B的下界
    - 对任意X，若$X \subseteq A$，$X \subseteq B$，则$X \subseteq A \cap B$ ----最大下界

集合与谓词逻辑

- 在量化逻辑表达式中使用集合符号
  - $\forall x \in S(P(x))$代表$\forall x(x \in S \to P(x))$
  - $\exists x \in S(P(x))$代表$\exists x(x \in S \wedge P(x))$
  - 举例
    - $\forall x \in R(x^2 \geq 0)$: $\forall x(x \in R \to (x^2 \geq 0))$
    - $\exists x \in Z(x^2 = 1)$: $\exists x(x \in Z \wedge x^2 = 1)$

$$\forall_{x \in S} P(x)$$

$$\exists_{x \in S} P(x)$$

- 逻辑表达式的真值集合，$\{x \in D \mid P(x)\}$
  - 例：$\{x \in Z \mid |x| = x\}$，$\{x \in Z \mid x^2 = 2\}$，$\{x \mid x \in Z \wedge x^2 = 2\}$

$$\{x \in X \mid p(x)\} \subseteq \{x \in X \mid q(x)\} \text{ 与 } \forall_{x \in X}\big(p(x) \to q(x)\big)$$

集合恒等式

等 式	名 称
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\sim(\sim A) = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律

集合恒等式

等 式	名 称
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	结合律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	分配律
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	德摩根定律
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	吸收律
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\varnothing$	补律

集合恒等式

- 定理：设$\boldsymbol{A,B,C}$为任意集合
  - **DeMorgan律：**

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

  - **幂集性质：**

$$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$$

$$P(A\cup B)\supseteq P(A)\cup P(B)$$

集合公式的基本证明方式

- 方法一：直接使用集合包含或相等的定义
  - 例：$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$
  - 分析：待证结论为$A \subseteq B$，即$\forall x(x \in A \to x \in B)$，因此，证明框架如下：

对任意意x，假设$x \in A$，{⋯适当内容⋯}
因此，$x \in B$，故$A \subseteq B$. □

  - 证明：对任意x，假设$x \in A$，根据集合并的定义有$x \in A \cup B$，由已知条件$A \cup B = B$，因此$x \in B$，故$A \subseteq B$. □

集合公式的基本证明方式

- 方法二：利用运算定义作逻辑等值式推演
  - 例：试证$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$$
\begin{aligned}
x \in A-(B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big(x \notin (B \cup C)\big) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow \big(x \in (A-B)\big) \wedge \big(x \in (A-C)\big) \\
&\Leftrightarrow x \in \big((A-B) \cap (A-C)\big)
\end{aligned}
$$

集合公式的基本证明方式

- 方法三：利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例1：已知$A \cap B = A$，证明$A - B = \emptyset$
  - 例2：$A \cup (A \cap B) = A$
  - 例3：已知$A \oplus B = A \oplus C$，证明$B = C$

$$
\begin{aligned}
A - B &= A \cap \sim B \\
&= (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim A) \\
&= A \cap (\sim B \cup \sim A) \\
&= A \cap \sim (A \cap B) \\
&= A \cap \sim A = \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \cap B) \\
&= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (E \cup B) = A \cap E = A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& B = \emptyset \oplus B = (A \oplus A) \oplus B \\
&= A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C) \\
&= (A \oplus A) \oplus C = \emptyset \oplus C = C
\end{aligned}
$$

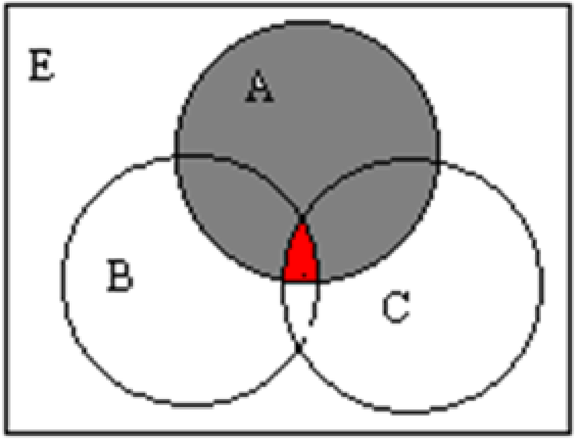
集合公式的基本证明方式

- 方法四：循环证明一系列逻辑等值式
  - 例：试证$A \cup B=B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B=A \Leftrightarrow A-B=\emptyset$
  - 证明路径：(1)→(2)→(3)→(4)→(1)
  - 只要完成上述证明，由循环关系就证明了上述诸多充分必要关系
  - 证明略

集合公式的基本证明方式

- 其它证明方法：文氏图也可帮助推测结论（但不能代替证明的过程）
  - 例：$(A-B)\cup(A-C)=A$成立的充分必要条件?

充要条件：$A\cap B\cap C=\emptyset$



本节小结

问题1：什么是集合?

\- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些?

\- 子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明?

\- 集合的交并补、对称差、广义并、广义交

\- 集合定义、恒等式、逻辑推演等

作业

- 见课程网站

ZFC公理化集合论

- 外延公理：（**Axiom of extensionality**）两个集合相同，当且仅当它们拥有相同的元素。
- 正则公理：（**Axiom of regularity / Axiom of foundation**）每一个非空集合**x**，总包含着一元素**y**，使**x**与**y**为不相交。
- 分类公理：（**Axiom schema of specification / axiom schema of separation / axiom schema of restricted comprehension**）或称子集公理，给出任何集合及命题**P(x)**，存在着一个原来集合的子集包含而且只包含使**P(x)**成立的元素。
- 配对公理：（**Axiom of pairing**）假如**x, y**为集合，那就有另一个集合**{x,y}**包含**x**与**y**作为它的仅有元素。
- 并集公理：（**Axiom of union**）每一个集合也有一个并集。也就是说，对于每一个集合**x**，也总存在着另一个集合**y**，而**y**的元素也就是而且只会是**x**的元素的元素。
- 替代公理：（**Axiom schema of replacement**）若一个可定义的函数**f**的定义域为一集合，且对定义域的任一**x**，**f(x)**也都是集合，则**f**的值域会是一个集合的子集。
- 无穷公理：（**Axiom of infinity**）存在着一个集合**x**，空集**{ }**为其元素之一，且对于任何**x**中的元素**y**，**y ∪ {y}**也是**x**的元素。
- 幂集公理：（**Axiom of power set**）每一个集合也有其幂集。那就是，对于任何的**x**，存在着一个集合**y**，使**y**的元素是而且只会是**x**的子集。
- 选择公理：（**Axiom of choice，Zermelo's version**）给出一个集合**x**，其元素皆为互不相交的非空集，那总存在着一个集合**y**（**x**的一个选择集合），包含**x**每一个元素的仅仅一个元素。

ZFC公理化集合论

外延公理（Axiom of extensionality）

- 如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

正则公理（Axiom of regularity/foundation）

- 任意非空集x包含一个成员y，x与集合y是不相交的

$$\forall x [\exists a (a \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))].$$

ZFC公理化集合论

分类公理（Axiom schema of separation）

- 对任意集合z和任意对z的元素x有定义的逻辑谓词$\phi(x)$，存在z的子集y，使$x \in y$当且仅当$x \in z$且$\phi(x)$为真.

$$\forall z \forall w_1 \ldots w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi)].$$

配对公理（Axiom of pairing）

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

并集公理（Axiom of union ）

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A].$$

ZFC公理化集合论

- 替代公理（Axiom schema of replacement）

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n \big[\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y\, \phi) \Rightarrow \exists B \forall x \big(x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \wedge \phi)\big)\big].$$

- 无穷公理（Axiom of infinity ）
  - $S(y)$是指y^+

$$\exists X \left[\varnothing \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X)\right].$$

- 幂集公理（Axiom of power set）

$$\forall x \exists y \forall z [z \subseteq x \Rightarrow z \in y].$$

ZFC公理化集合论

选择公理（Axiom of choice）

- 任一非空集合族$(S_i)_{i\in I}$均存在元素族$(s_i)_{i\in I}$, $\forall i \in I. s_i \in S_i$

或良序定理（Well-ordering theorem）

$$\forall X \exists R (R \text{ well-orders } X).$$

数学基础的几次危机

- 19世纪早期，发现数学存在缺陷
  - Н.И.Лобачéвский，G. Riemann：非欧几何
  - A. Cauthy等：分析(微积分及其扩展)的基础

- 19世纪后期的公理化运动：去除基于直觉或经验的朴素概念的模糊之处，使数学严密化
  - G. Peano，D. Hilbert：算术与几何的公理化

皮亚诺公理
(Peano axioms for natural numbers)

- 零是个自然数.
- 每个自然数都有一个后继（也是个自然数）.
- 零不是任何自然数的后继.
- 不同的自然数有不同的后继.
- （归纳公理）设由自然数组成的某个集合含有零，且每当该集合含有某个自然数时便也同时含有这个数的后继，那么该集合定含有全部自然数.

- 备注：另有4个与自然数相等有关的公理

皮亚诺公理
(Peano axioms for natural numbers)

戴德金-皮亚诺结构可以描述为满足所有以下条件的三元组 (S,f,e)

- $e \in S$
- $\forall a \in S\ (f(a) \in S)$
- $\forall b \in S\ \forall c \in S((f(b)=f(c)) \rightarrow (b=c))$
- $\forall a \in S\ (f(a) \neq e)$
- $\forall A \subseteq S(((e \in A) \wedge (\forall a \in A(f(a) \in A))) \rightarrow (A=S))$