

树的基本概念

回顾

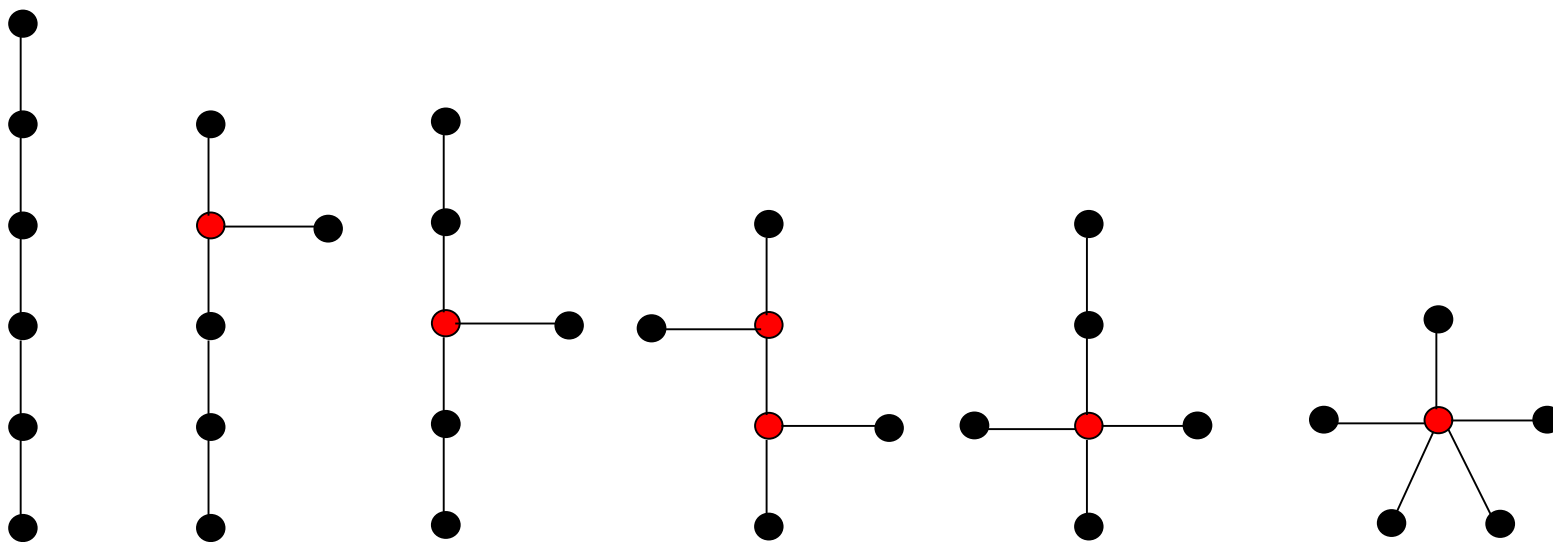
- 问题1：什么是二部图及其匹配？
 - ▣ 两个无内部边的顶点集；互不相邻的边的集合
- 问题2：二部图中的有哪些匹配？
 - ▣ 完备匹配：一个部饱和，充要条件为Hall定理
 - ▣ 最大匹配：充要条件为无增广路径（Berge定理）
 - ▣ 稳定匹配：每个节点有线性序，稳定匹配算法

本节提要

- 内容1：树的定义及其性质
- 内容2：根树以及有序根树的遍历

树的定义

- 定义：不包含简单回路的连通无向图称为树。
 - 森林（连通分支为树）
 - 树叶/分支点



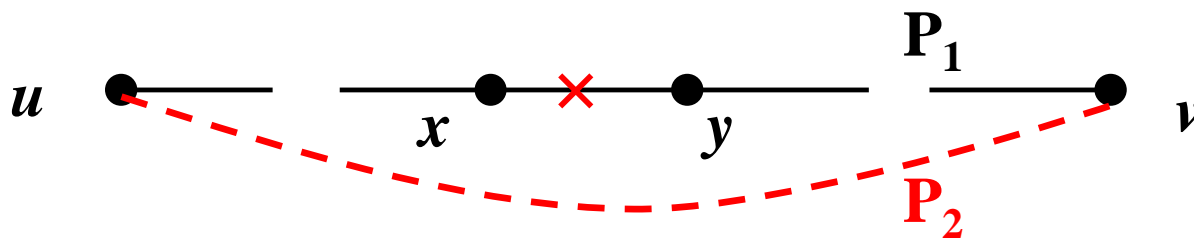
互不同构的6个顶点的树

树中的通路

□ 设 T 是树，则 $\forall u, v \in V_T$, T 中存在**唯一的 uv -简单通路**。

■ 证明： T 是连通图， $\therefore \forall u, v \in V_T$, T 中存在 uv -简单通路。

假设 T 中有两条不同的 uv -简单通路 P_1, P_2 。不失一般性，存在 $e=(x,y)$ 满足： $e \in P_1$ 但 $e \notin P_2$ ，且在路径 P_1 上 x 比 y 靠近 u 。令 $T^*=T-\{e\}$ ，则 T^* 中包含 P_2 ，于是 $(P_1$ 中的 xu -段) $+P_2+(P_1$ 中的 vy -段)是 T^* 中的 xy -通路， $\therefore T^*$ 中含 xy -简单通路(记为 P')，则 $P'+e$ 是 T 中的简单回路，与树的定义矛盾。



有关树的几个等价命题

- 设 T 是简单无向图，下列四个命题等价：
 - (1) T 是不包含简单回路的连通图。//树的定义
 - (2) T 中任意两点之间有唯一简单通路。
 - (3) T 连通，但删除任意一条边则不再连通。
 - (4) T 不包含简单回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的简单回路。
- 备注：
 - 树是边最少的连通图
 - 树是边最多的无简单回路的图

树中边和点的数量关系

- 设 T 是树，令 $n=|V_T|$, $m=|E_T|$, 则 $m=n-1$ 。
- 证明. 对 n 进行归纳证明。当 $n=1$, T 是平凡树，结论显然成立。

假设当 $n \leq k$ 时结论成立。

若 $n=k+1$ 。因为 T 中每条边都是割边，任取 $e \in E_T$, $T-\{e\}$ 含两个连通分支，设其为 T_1, T_2 , 并设它们边数分别是 m_1, m_2 , 顶点数分别是 n_1, n_2 , 根据归纳假设： $m_1=n_1-1, m_2=n_2-1$ 。

注意： $n_1+n_2=n, m_1+m_2=m-1$ 。

$$\therefore m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1.$$

连通图边数的下限

- 顶点数为 n ($n \geq 2$) 的连通图, 其边数 $m \geq n-1$ 。

(对于树, $m=n-1$, “树是边最少的连通图”)

- 证明: 对 n 进行一般归纳。当 $n=2$ 时结论显然成立。

设 G 是边数为 m 的连通图, 且 $|V_G|=n>2$ 。任取 $v \in V_G$, 令 $G'=G-v$, 设 G' 有 ω ($\omega \geq 1$) 个连通分支 $G_1, G_2, \dots, G_\omega$, 且 G_i 的边数和顶点数分别是 m_i 和 n_i 。

我们有 $n=n_1+n_2+\dots+n_\omega+1$, $m \geq m_1+m_2+\dots+m_\omega+\omega$ (每个连通分支中至少有一个顶点在 G 中与删除的 v 相邻)。

由归纳假设, $m_i \geq n_i-1$ ($i=1, 2, \dots, \omega$)。

所以: $m \geq m_1+m_2+\dots+m_\omega+\omega \geq n_1+n_2+\dots+n_\omega-\omega+\omega=n-1$ 。

与边点数量关系有关的等价命题

□ 设 T 是简单无向图，下列三个命题等价：

(1) T 是树。

(2) T 不含简单回路，且 $m=n-1$ 。

(3) T 连通，且 $m=n-1$ 。

▣ (1) \Rightarrow (2)，已证。

▣ (2) \Rightarrow (3)，若不连通，分支数 $\omega \geq 2$ ，各分支为树（无简单回路、连通），则 $m=n-\omega < n-1$ ，矛盾。

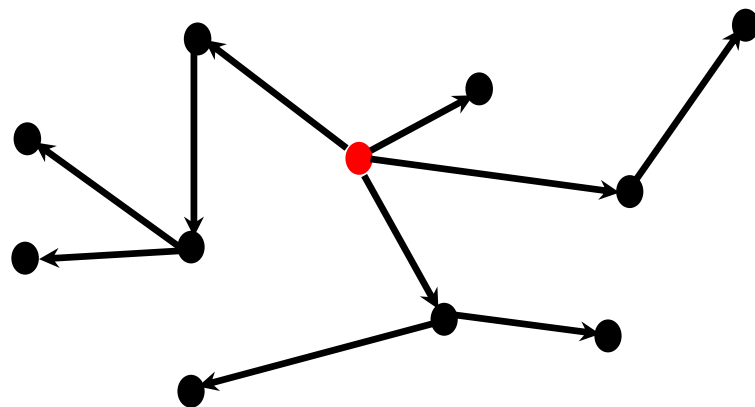
▣ (3) \Rightarrow (1)，设 e 是 T 中任意一条边，令 $T'=T-e$ ，且其边数和顶点数分别是 m' 和 n ，则 $m'=m-1=n-2 < n-1$ ， $\therefore T'$ 是非连通图。因此， T 的任意边均不在简单回路中， $\therefore T$ 中无简单回路。

本节提要

- 内容1：树的定义及其性质
 - ▣ 树就是不包含简单回路的连通无向图
 - ▣ 树是边最少的连通图；也是边最多的无简单回路的图
- 内容2：根树以及有序根树的遍历

根树的定义

- 定义：底图为树的有向图称为 **有向树**。
- 定义：若有向树恰含一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1，则该有向树称为 **根树**，那个入度为0的顶点称为 **根**。
- 若 v_0 是根树T的根，则对T中任意其它顶点 v_n ，存在唯一的有向 v_0v_n -通路，但不存在 v_nv_0 -通路。



根树的图形表示

□ 边上的方向用约定的位置关系表示

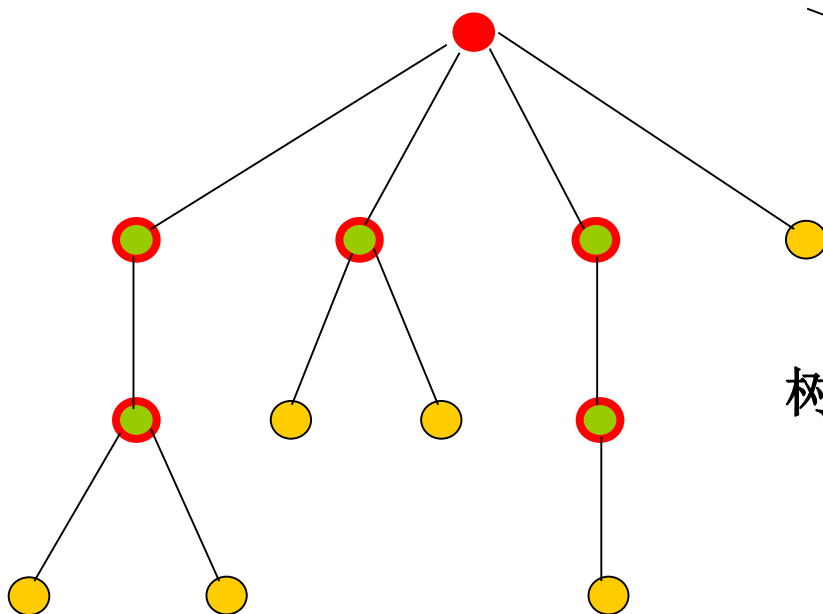
根也是内点，除非它是图中唯一顶点。

第0层

第1层

第2层

第3层

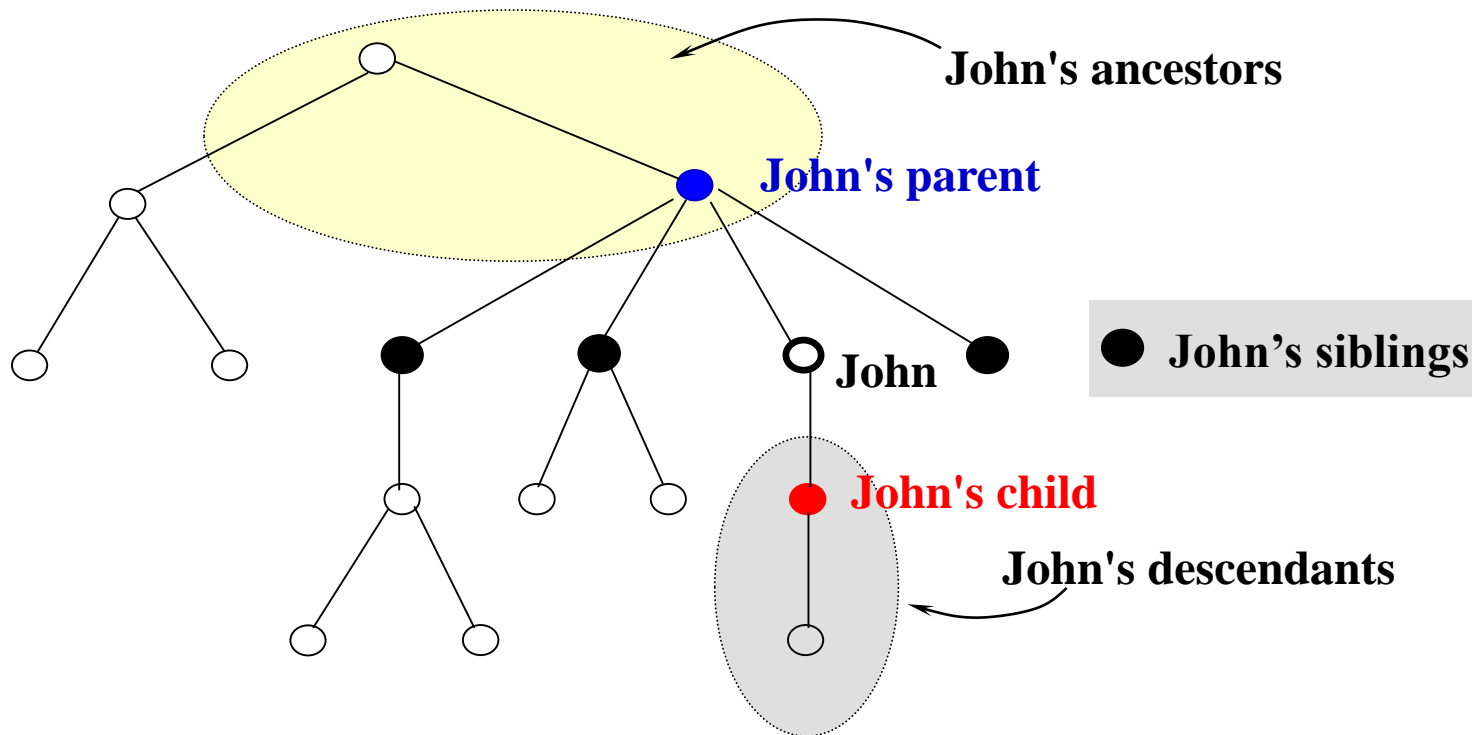


- 根
- 内点（有子女）
- 树叶（无子女）

树高=3（最大的通路长度）

根树与家族关系

- 用根树容易描述家族关系，反之，家族关系术语被用于描述根树中顶点之间的关系。

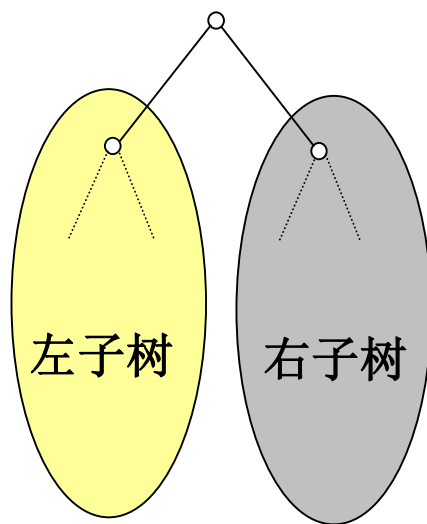


根树的几个术语

- **m元树**：每个内点至多有**m**个子女
 - ▣ **2元树**也称为**二叉树**
- **满m元树** (**full m-ary tree**)
 - ▣ 每个内点恰好有**m**个子女
- **完全m元树** (**complete m-ary tree**)
 - ▣ 假设有**h**层：除第**h**层外，其它各层的结点数都达到最大个数，第**h**层所有的结点都连续集中在最左边
- **平衡**：树叶都在**h**层或**(h-1)**层，**h**为树高
- **有序**：同层中每个顶点排定次序
 - ▣ 有序二叉树通常也简称为**二叉树**

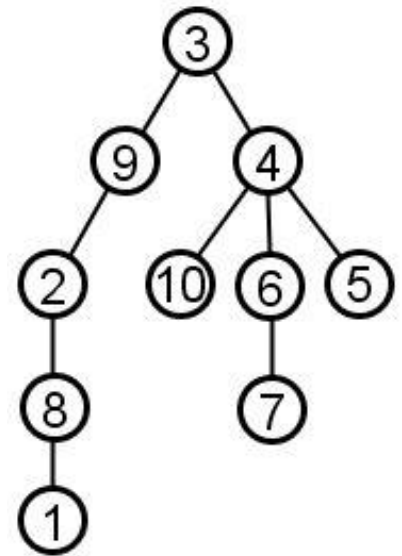
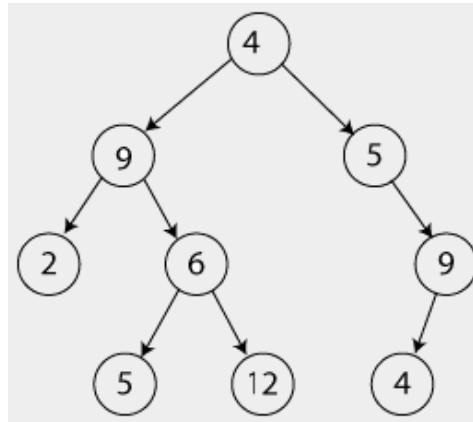
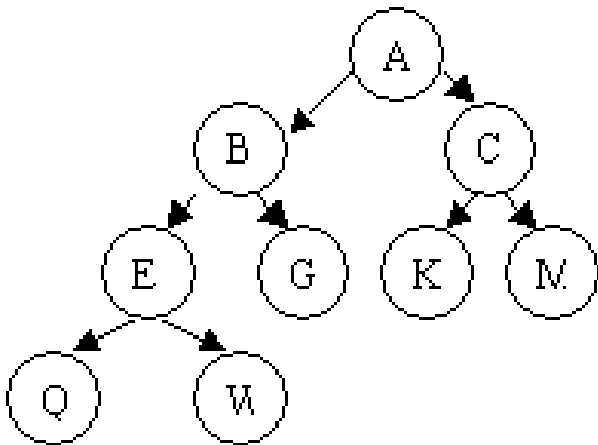
根树的几个术语（续）

- 定义：设 T 是根树， T 中任一顶点 v 及其所有后代的导出子图显然也是根树(以 v 为根)，称为 T 的**根子树**。
- 有序二叉树的子树分为左子树和右子树



例

- 树的高度、各顶点所处的层数
- 满、完全、平衡



满m元树的顶点数

- 设T是满m元树，
 - ▣ 若T有n个顶点，则有 $i=(n-1)/m$ 个内点和 $l=[(m-1)n+1]/m$ 个树叶.
 - ▣ 若T有i个内点，则有 $n=mi+1$ 个顶点和 $l=(m-1)i+1$ 个树叶.
 - ▣ 若T有l个树叶，则有 $n=(ml-1)/(m-1)$ 个顶点和 $i=(l-1)/(m-1)$ 个内点.

$$n-1 = m \times i \quad (\text{入度总数} = \text{出度总数})$$

$$n = i + l \quad (\text{顶点分为内点和树叶})$$

高度为 h 的 m 元树的顶点数

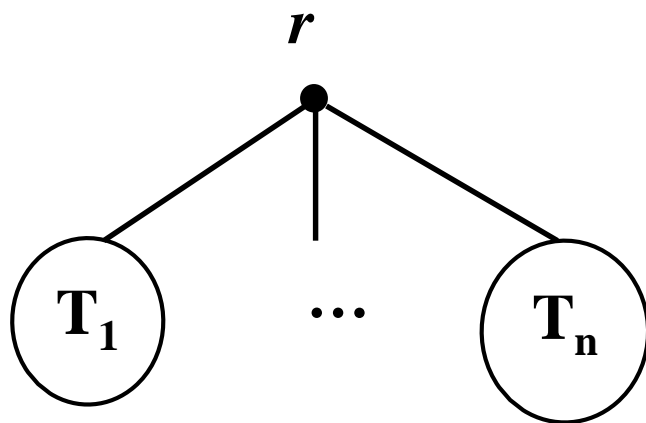
- 高度为 h 的 m 元树最多有个 m^h 个树叶。
 - ▣ 按照高度 h 进行归纳证明。（第1层顶点最多为 m 个）
- 若高度为 h 的 m 元树有 l 个树叶，则 $h \geq \lceil \log_m l \rceil$.
 - ▣ 如果这棵树是完全的，则有 $h = \lceil \log_m l \rceil$.

有序根树的遍历

□ 前序遍历 (preorder)

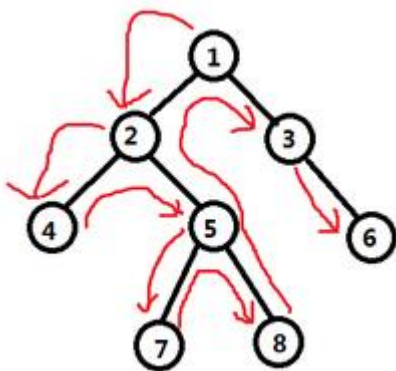
□ T 只包含根 r , 则为 r ;

□ T 的子树为 T_1, \dots, T_n , 则为 $r, \text{preorder}(T_1), \dots, \text{preorder}(T_n)$

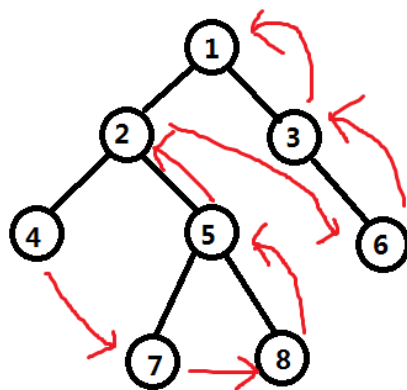


有序根树的遍历

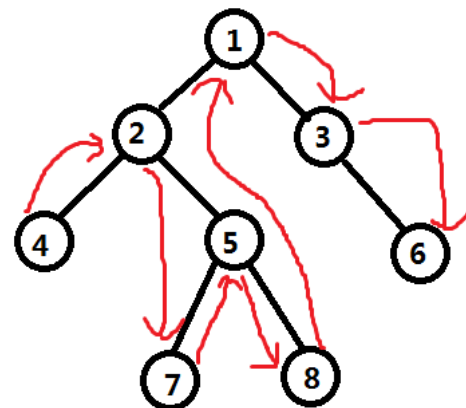
前序遍历
(preorder)



后序遍历
(postorder)



中序遍历
(postorder)



本节小结

- 内容1：树的定义及其性质
 - ▣ 树就是不包含简单回路的连通无向图
 - ▣ 树是边最少的连通图；也是边最多的无简单回路的图
- 内容2：根树以及有序根树的遍历
 - ▣ 根数：一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1
 - ▣ 完全树、平衡树、有序树
 - ▣ 有序根树的前中后遍历

作业

- 见课程网站

例题

23

- 画出所有**6**个顶点的非同构的无向树
 - ▣ 度数序列只能是：
 - **1 1 1 1 1 5; 1 1 1 1 2 4; 1 1 1 1 3 3;**
 - **1 1 1 2 2 3; 1 1 2 2 2 2**
- 已知一个**7**阶无向树中有三个树叶，一个**3**度顶点（其余三个顶点度数均不为**1**、**3**），画出所有满足要求的非同构无向树
 - ▣ 度数只能是**1 1 1 2 2 2 3**，考虑度数为**3**顶点的邻居