

欧拉图与哈密尔顿图

回顾

2

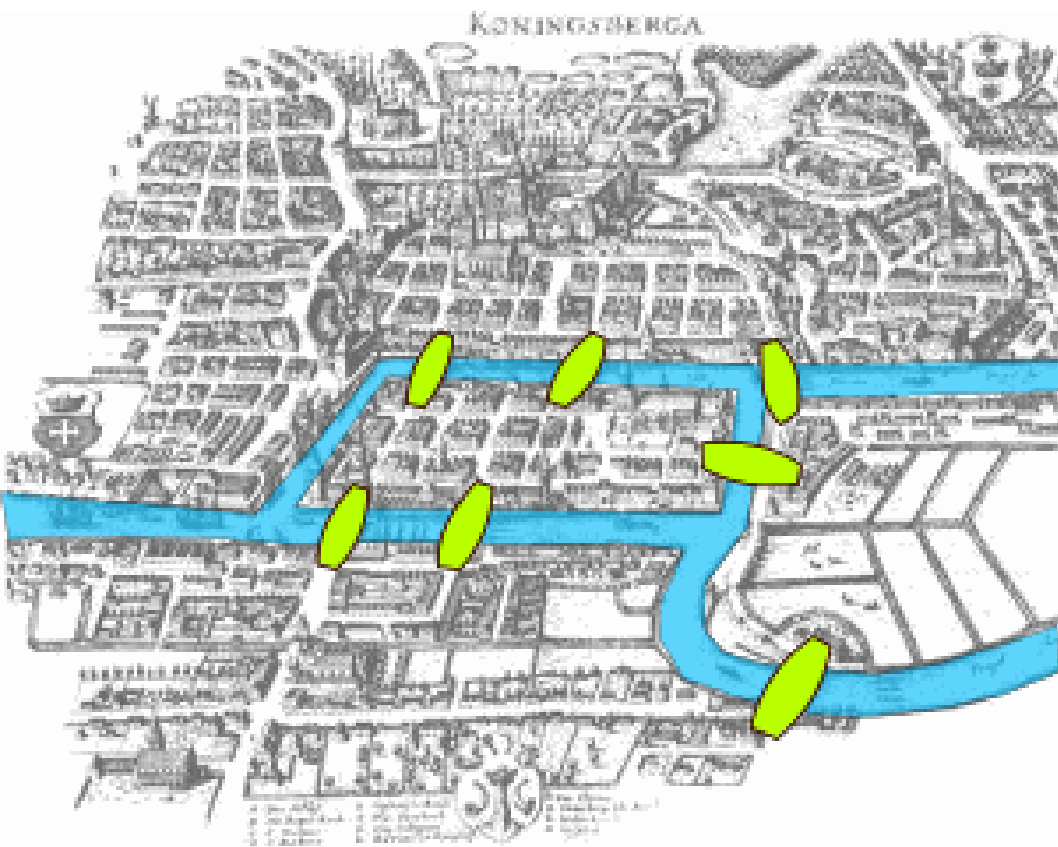
- 内容1：通路 & 回路
 - ▣ 简单通路边不重复、初级通路点不重复
- 内容2：无向图的连通性
 - ▣ 割点、割边，点/边连通度、 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ ，Whitney定理
- 内容3：有向图的连通性
 - ▣ 强/单/弱连通，无向图的边定向

本节提要

- 内容1：欧拉图
 - ▣ 什么是欧拉图？
 - ▣ 欧拉图的充要条件？
 - ▣ 如何构造欧拉回路？
- 内容2：哈密尔顿图
 - ▣ 什么是哈密尔顿图？
 - ▣ 哈密尔顿图的必要和充分条件？
 - ▣ 哈密尔顿图有哪些应用？

Königsberg七桥问题 (回顾)

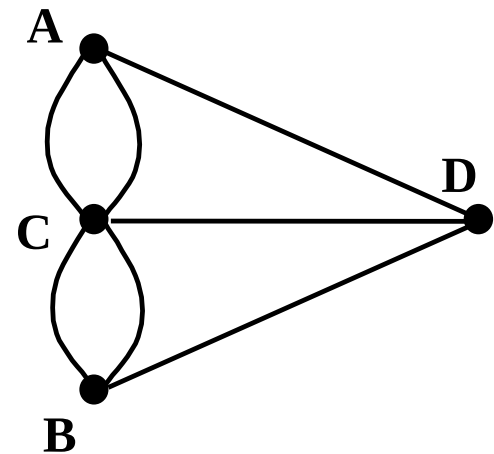
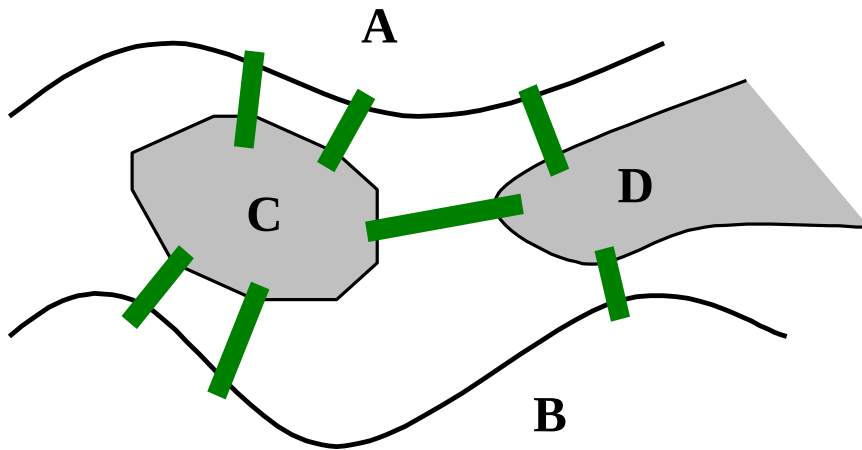
4



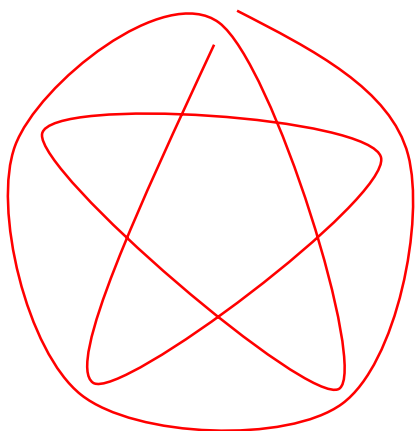
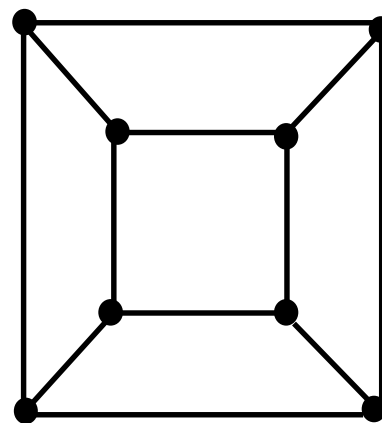
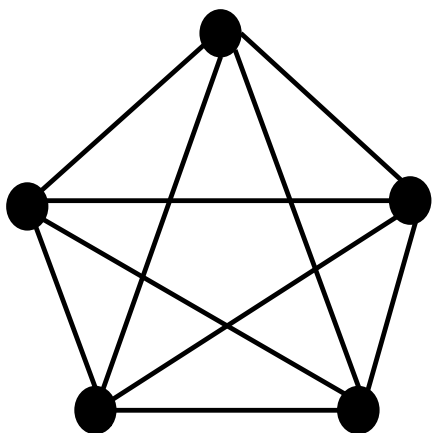
Leonhard Euler (1707 – 1783)

Königsberg七桥问题（回顾）

- 问题的抽象：
 - 用顶点表示对象-“地块”
 - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
 - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”



“一笔画”问题



?

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为 **欧拉通路**。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为 **欧拉回路**。
- 如果图 G 中含欧拉回路，则 G 称为 **欧拉图**。如果图 G 中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则 G 称为 **半欧拉图**。

//备注：通常假设 G 是连通的。

欧拉图的充要条件

□ 连通图 G 是欧拉图 当且仅当 G 中每个顶点的度数均为偶数。

□ 证明：

$\Rightarrow$ 设 C 是 G 中的欧拉回路，则 $\forall v \in V_G$, $d(v)$ 必等于 v 在 C 上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

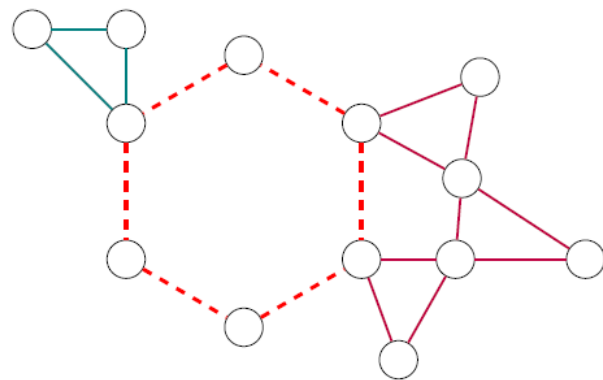
$\Leftarrow$ 可以证明：

(1) G 中所有的边可以分为若干边不相交的简单回路。

(2) 这些回路可以串成一个欧拉回路。

欧拉图的充要条件

- (1) 若图 G 中任一顶点均为偶度点，则 G 中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。
- 证明：对 G 的边数 m 施归纳法。
 - ▣ 当 $m=1$, G 是环，结论成立。
 - ▣ 对于 $k \geq 1$ ，假设当 $m \leq k$ 时结论成立。
 - ▣ 考虑 $m=k+1$ 的情况：注意 $\delta_G \geq 2$ ， G 中必含简单回路，记为 C ，令 $G' = G - E_C$ ，设 G' 中含 s 个连通分支。显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于 k 。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及 C 两两均无公共边，于是，结论成立。



欧拉图的充要条件

- (2) 若连通图 G 中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则 G 中含欧拉回路。
 - ▣ 证明：对 G 中简单回路个数 d 施归纳法。当 $d=1$ 时显然。
 - ▣ 假设 $d \leq k (k \geq 1)$ 时结论成立。考虑 $d=k+1$ 。
 - ▣ 按某种方式对 $k+1$ 个简单回路排序，令 $G' = G - E(C_{k+1})$ ，设 G' 中含 s 个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于 k 。由归纳假设，每个非平凡连通分支 G_i 均为欧拉图，设其欧拉回路是 C_i' 。因 G 连通，故 C_{k+1} 与诸 C_i' 都有公共点。
 - ▣ G 中的欧拉回路构造如下：从 C_{k+1} 上任一点(设为 v_0)出发遍历 C_{k+1} 上的边，每当遇到一个尚未遍历的 C_i' 与 C_{k+1} 的交点(设为 v_i')，则转而遍历 C_i' 上的边，回到 v_i' 继续沿 C_{k+1} 进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设 G 是非平凡连通图，以下三个命题等价：
 - (1) G 是欧拉图。
 - (2) G 中每个顶点的度数均为偶数。
 - (3) G 中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

□ 设 G 是连通图， G 是半欧拉图 当且仅当 G 恰有两个奇度点。

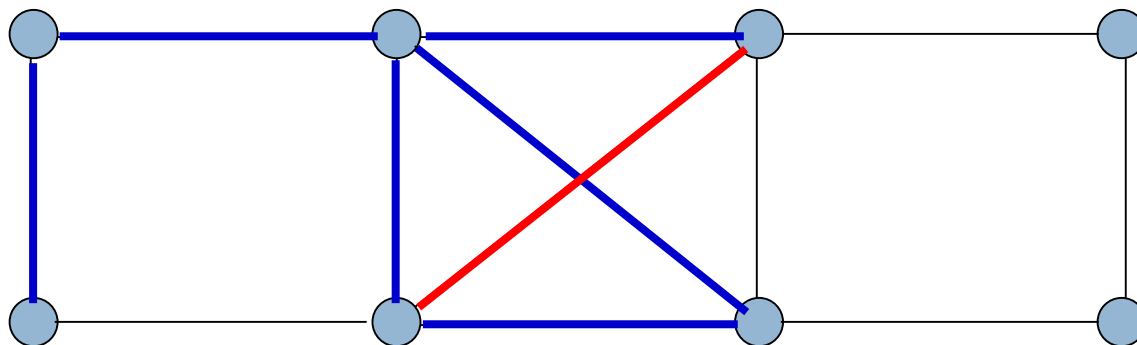
□ 证明:

$\Rightarrow$ 设 P 是 G 中的欧拉通路(非回路)，设 P 的始点与终点分别是 u, v ，则对 G 中任何一点 x ，若 x 非 u, v ，则 x 的度数等于在 P 中出现次数的2倍，而 u, v 的度数则是它们分别在 P 中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设 G 中两个奇度顶点是 u, v ，则 $G+uv$ 是欧拉图，设欧拉回路是 C ，则 C 中含 uv 边， $\therefore C-uv$ 是 G 中的欧拉通路。(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路-Fleury算法

□ 算法：

▣ 输入：欧拉图 G

▣ 输出：简单通路 $P = v_0e_1v_1e_2, \cdots, e_iv_ie_{i+1}, \cdots, e_me_m$ ，其中包含了 E_G 中所有的元素。

1. 任取 $v_0 \in V_G$ ，令 $P_0 = v_0$ ；

2. 设 $P_i = v_0e_1v_1e_2, \cdots, e_iv_i$ ，按下列原则从 $E_G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选择 e_{i+1} 。

(a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

(b) 除非别无选择，否则 e_{i+1} 不应是 $G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的割边。

3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时, $P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i e_{i+1} \cdots e_m v_m$,
- 其中诸 e_i 互异是显然的。只须证明:
 - (1) P_m 是回路, 即 $v_0 = v_m$ 。
 - (2) P_m 包括了 G 中所有的边。

令 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$

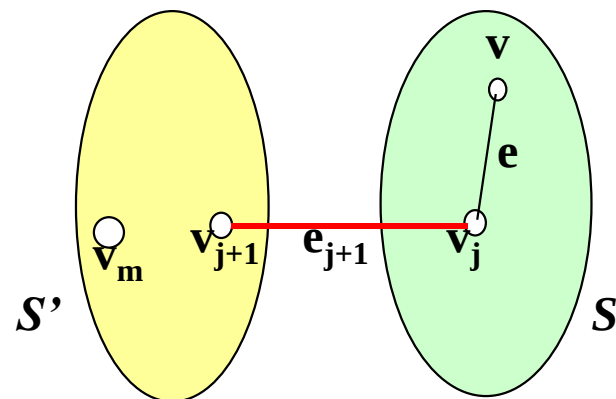
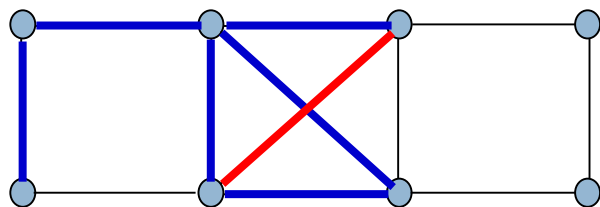
- (1) (证明是回路) 假设 $v_0 \neq v_m$ 。由算法终止条件, 在 G_m 中已没有边与 v_m 相关联。假设除最后一次外, v_m 在 P_m 中出现 k 次, 则 v_m 的度数是 $2k+1$, 与 G 中顶点度数是偶数矛盾。

Fleury算法的证明

(2) (证明含所有边) 假设 P_m 没有包括 G 中所有的边, 令 G_m 中所有非零度顶点集合为 S (非空), 令 $S' = V_G - S$, 则 $v_m \in S'$ 。

考察序列 $e_1, e_2, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_m$ 。假设 j 是满足 $v_j \in S$, 而 $v_{j+1} \in S'$ 的最大下标。因为 P_m 的终点在 S' 中, 因此 e_{j+1} 一定是 G_j 中的割边。

令 e 是在 G_j 中与 v_j 相关联的异于 e_{j+1} 的边 (非零度点一定有), 根据算法选择 e_{j+1} (割边) 的原则, e 也一定是割边。但是, G_m 中任意顶点的度数必是偶数, e 在 G_m 中的连通分支是欧拉图, e 在 G_m 的某个欧拉回路中, 不可能是 G_j 的割边。矛盾。



有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 含有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

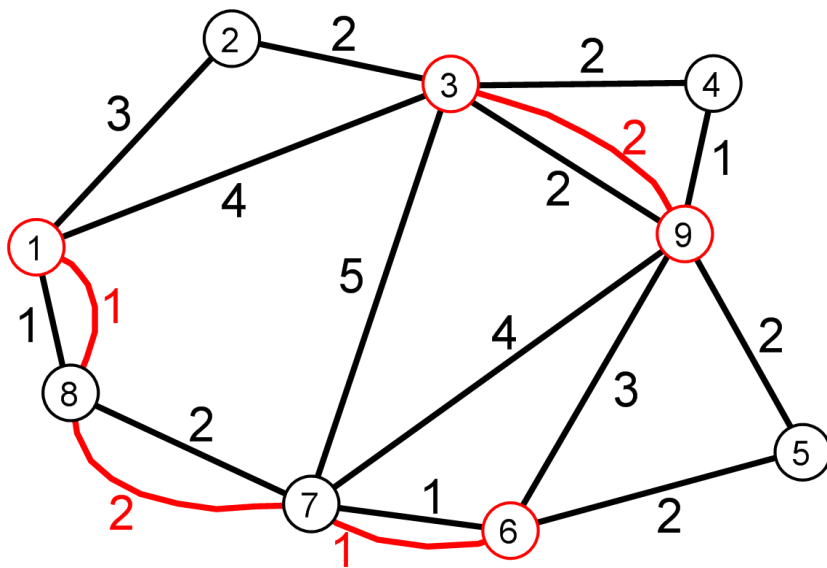
- 若 G 是弱连通的有向图，则下列命题等价：
 - ▣ G 中含有向欧拉回路。
 - ▣ G 中任一顶点的入度等于出度。
 - ▣ G 中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。
- (证明与无向欧拉图类似。)

中国邮递员问题（管梅谷，1962）

- 问题：邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道至少一次，再回邮局，如何选择最短路线？
- 数学模型
 - ▣ 无向带权图 G : E_G 中元素对应于辖区内的街道， V_G 中的元素对应于街道的交叉点，街道长度用相应边的权表示。
 - ▣ 问题的解: G 中包含所有边的权最小的回路，称为最优回路(注意：未必是简单回路)。
 - ▣ 当 G 是欧拉图，则最优回路即欧拉回路。
 - ▣ 若 G 不是欧拉图，则通过加边来消除 G 中的奇度顶点，将其转换成欧拉图。

中国邮递员问题

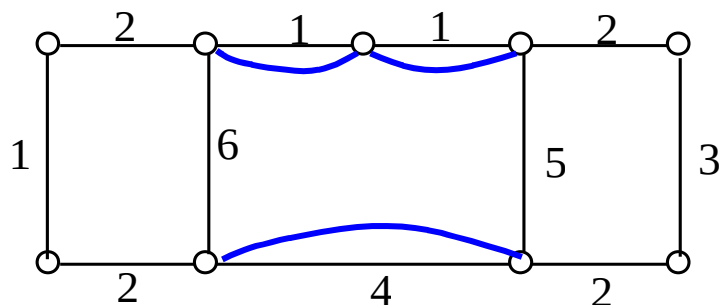
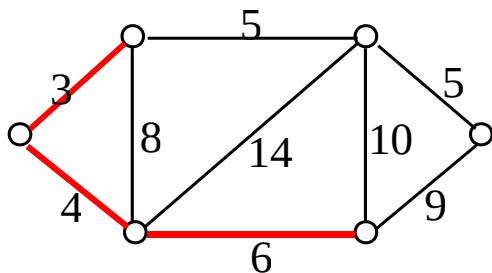
- 通过加边来消除 G 中的奇度顶点，使得加边得到的欧拉图 G^* 中重复边的权和最小。



中国邮递员问题-算法

□ 算法过程

- 1. 用Dijkstra算法求所有奇度顶点对之间的最短路径。(若 G 是欧拉图，直接用Fleury算法)
- 2. 以 G 中所有奇度顶点构造带权完全图 G_{2k} ，每边的权是两顶点间最短路径长度。
- 3. 求 G_{2k} 中的最小权完美匹配 M 。
- 4. 按照 M 中的各个路径添加重复边。再用Fleury算法求欧拉回路。



本节提要

□ 内容1：欧拉图

- ▣ 什么是欧拉图：含有欧拉回路
- ▣ 欧拉图的充要条件：所有顶点度数为偶数
- ▣ 如何构造欧拉回路：Fleury算法

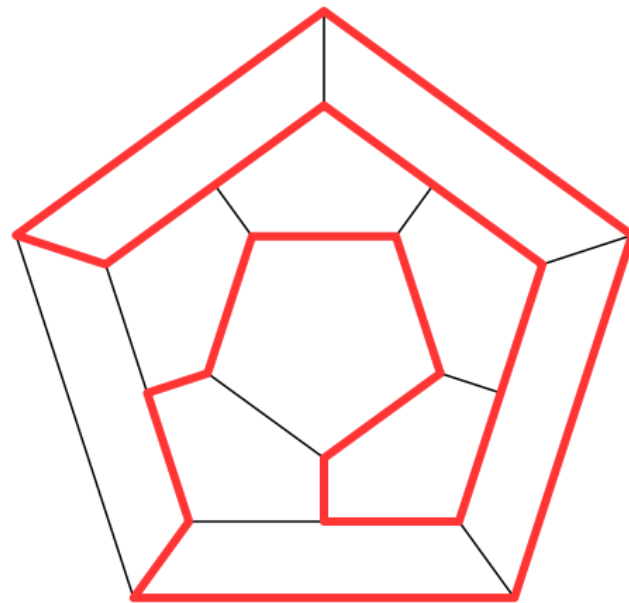
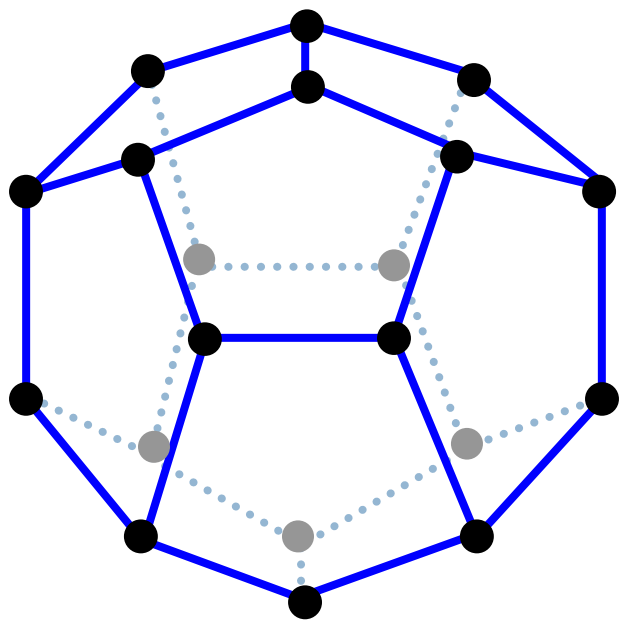
□ 内容2：哈密尔顿图

- ▣ 什么是哈密尔顿图？
- ▣ 哈密尔顿图的必要和充分条件？
- ▣ 哈密尔顿图有哪些应用？

周游世界的游戏

22

- 沿着正十二面体的棱寻找一条旅行路线, 通过每个顶点恰好一次又回到出发点. (**Hamilton 1857**)



Hamilton通路/回路

23

- **G 中 Hamilton 通路**
 - ▣ 包含G中所有顶点
 - ▣ 通路上各顶点不重复
- **G 中 Hamilton 回路**
 - ▣ 包含G中所有顶点
 - ▣ 除了起点与终点相同之外，通路上各顶点不重复。
- **Hamilton 回路与 Hamilton 通路**
 - ▣ Hamilton通路问题可转化为Hamilton回路问题

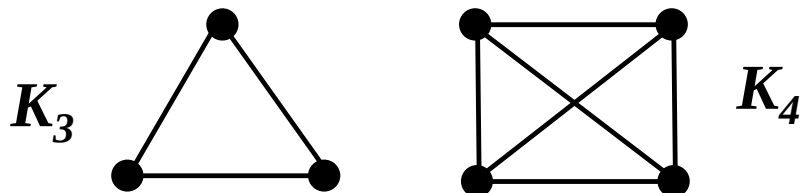
Hamilton回路的基本特性

24

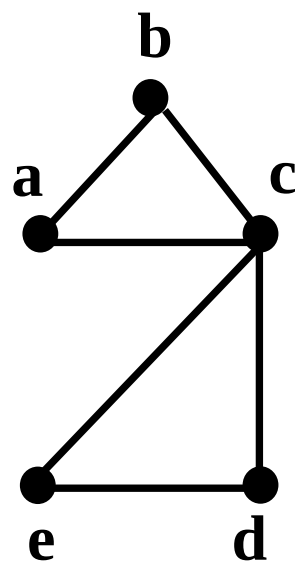
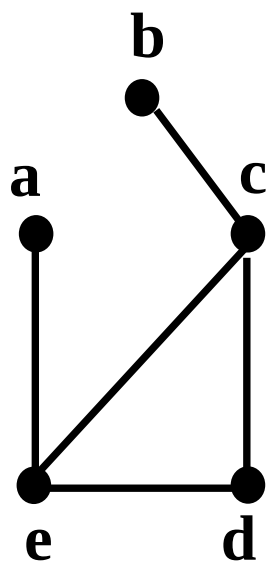
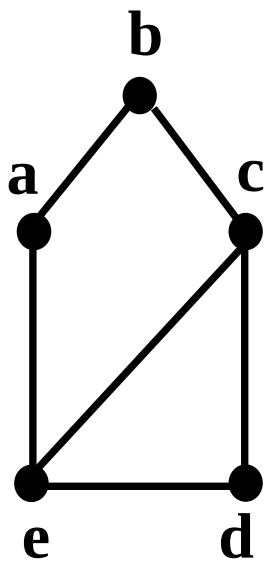
- **Hamilton回路**:无重复地遍历图中诸点,
Euler回路:无重复地遍历图中诸边.
- 若图G中有一顶点的度为1, 则无**Hamilton回路**.
- 设图G中有一顶点的度大于2, 若有**Hamilton回路**, 则只用其中的两条边.
- 若图中有n个顶点, 则**Hamilton回路**恰有n条边.
- 注: **Hamilton回路**问题主要针对简单图.

Hamilton回路的存在性问题

25



$K_n (n \geq 3)$ 有 Hamilton 回路



哈密尔顿图的必要条件

26

- 如果图 $G=(V, E)$ 是 Hamilton 图，则对 V 的任一非空子集 S ，都有

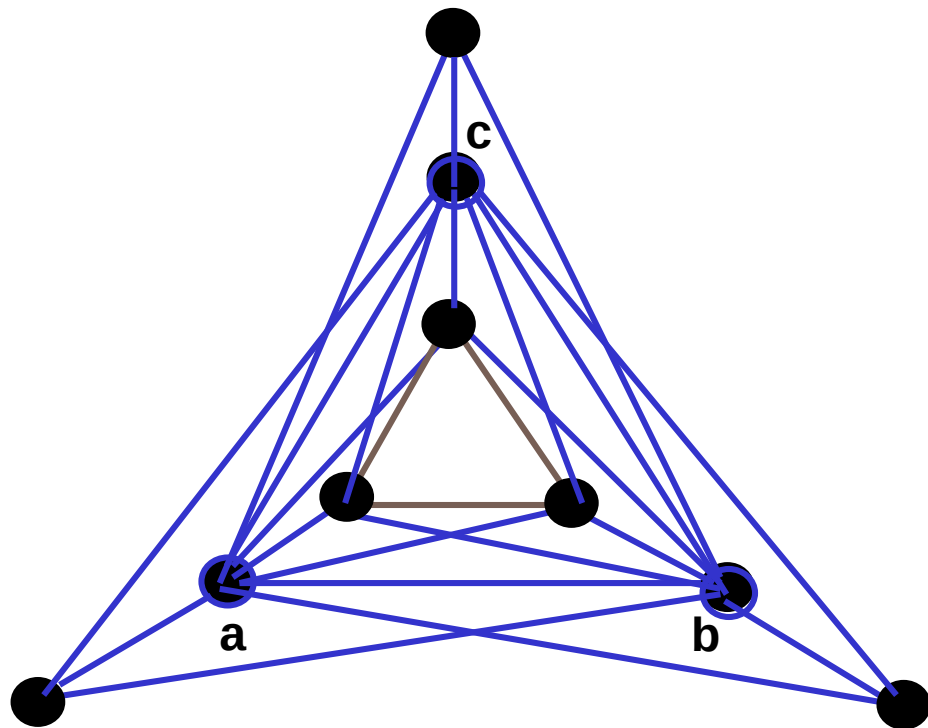
$$P(G-S) \leq |S|$$

其中， $P(G-S)$ 表示图 $G-S$ 的连通分支数.

理由： 设 C 是 G 中的 Hamilton 回路, $P(G-S) \leq P(C-S) \leq |S|$

例

27



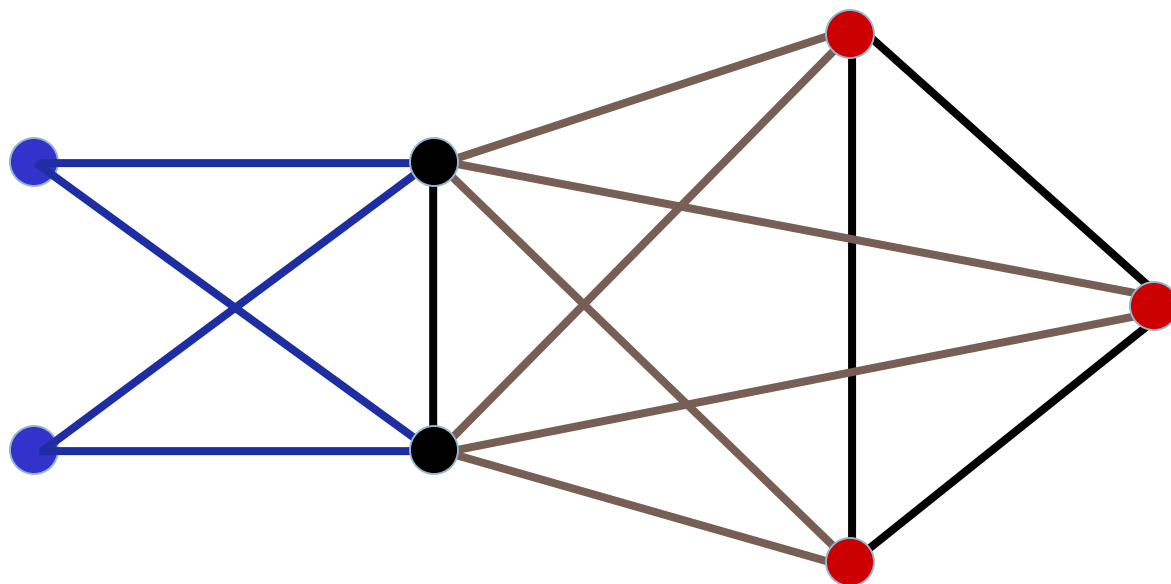
将图中点 a, b, c 的集合记为 S , $G-S$ 有4个连通分支, 而 $|S|=3$. G 不是Hamilton图.

例

28

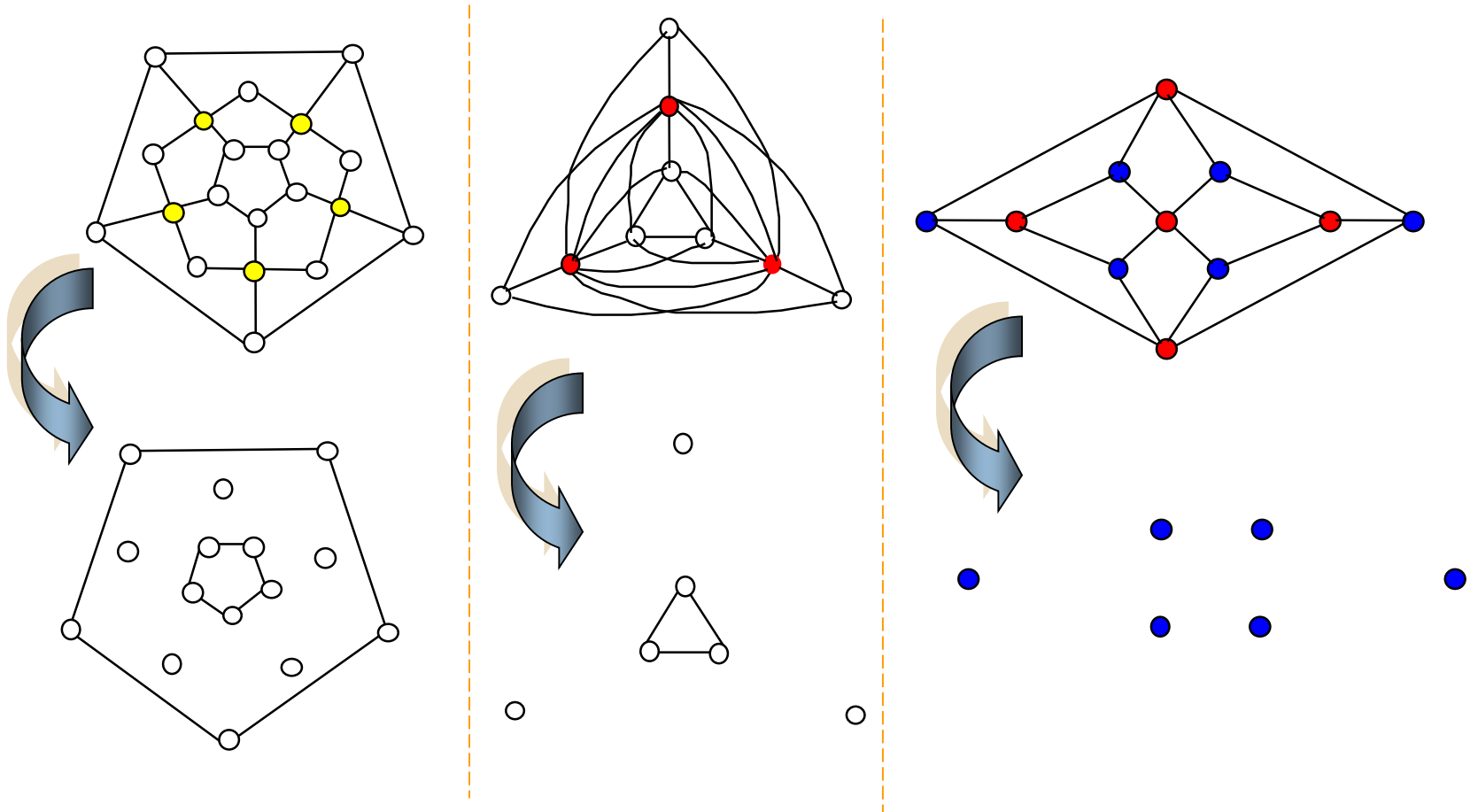
$$\overline{K}_h \longleftrightarrow K_h \longleftrightarrow K_{n-2h}$$

下图给出的是 $C_{2,7}$ 的具体图 ($h=2, n=7$)



例

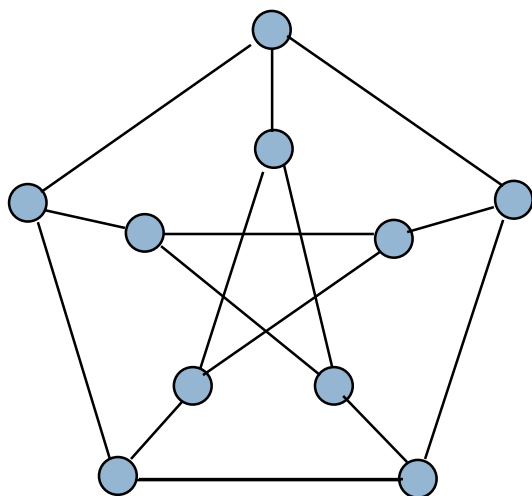
29



必要条件的局限性

30

- 必要条件只能判定一个图不是哈密尔顿图
 - ▣ **Petersen**图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图。



哈密尔顿图的充分条件

31

□ Dirac定理（狄拉克, 1952）

设 G 是无向简单图， $|G|=n \geq 3$ ，若 $\delta(G) \geq n/2$ ，则 G 有哈密尔顿回路。

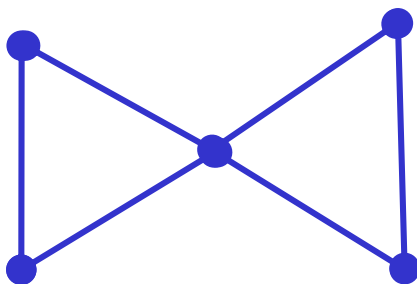
□ Ore定理（奥尔, 1960）

设 G 是无向简单图， $|G|=n \geq 3$ ，若 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足： $d(u) + d(v) \geq n$ ，则 G 有哈密尔顿回路。

充分条件的讨论

32

- “ $\delta(G) \geq n/2$ ”不能减弱为： $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$
- 举例， $n=5$ ， $\delta(G)=2$. G 不是Hamilton图.



- 存在哈密尔顿通路的充分条件（Ore定理的推论）

设 G 是无向简单图， $|G|=n \geq 2$ ，若 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足： $d(u) + d(v) \geq n - 1$ ，则 G 有哈密尔顿通路。

Ore定理的证明

33

□ Ore定理 (1960)

设 G 是无向简单图， $|G|=n \geq 3$ ，若 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足： $d(u) + d(v) \geq n$ ，则 G 有哈密尔顿回路。

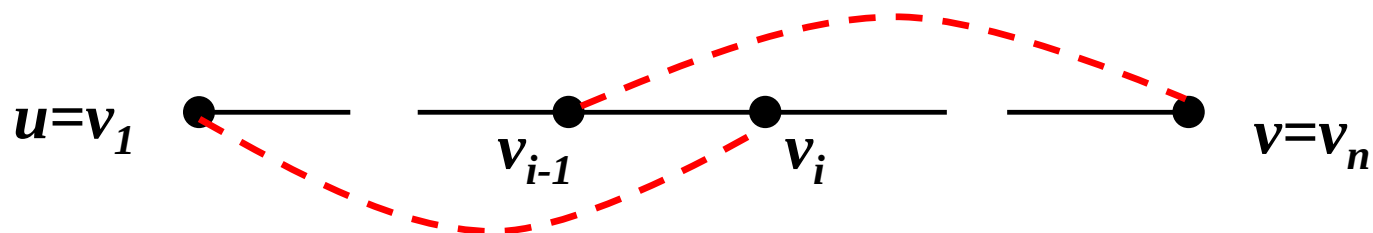
□ 证明：反证法，设存在满足 $(*)$ 的图 G ，但是 G 没有Hamilton回路。

不妨假设 G 是边极大的非Hamilton图，且满足 $(*)$ 。若 G 不是边极大的非Hamilton图，则可以不断地向 G 增加若干条边，把 G 变成边极大的非Hamilton图 G' ， G' 依然满足 $(*)$ ，因为对 $\forall v \in V(G)$ ， $d_G(v) \leq d_{G'}(v)$ 。

Ore定理的证明

34

设 u, v 是 G 中不相邻的两点，于是 $G+uv$ 是Hamilton图. 因此， G 中有起点为 u ，终点为 v 的Hamilton通路：



不存在两个相邻的顶点 v_{i-1} 和 v_i , 使得 v_{i-1} 与 v 相邻且 v_i 与 u 相邻. 若不然, $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, \dots, v_i, v_1)$ 是 G 的 Hamilton 回路. 设在 G 中 u 与 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 相邻, 则 v 与 $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_k-1}$ 都不相邻, 因此 $d(u)+d(v) \leq k+n-1-k < n$. 矛盾.

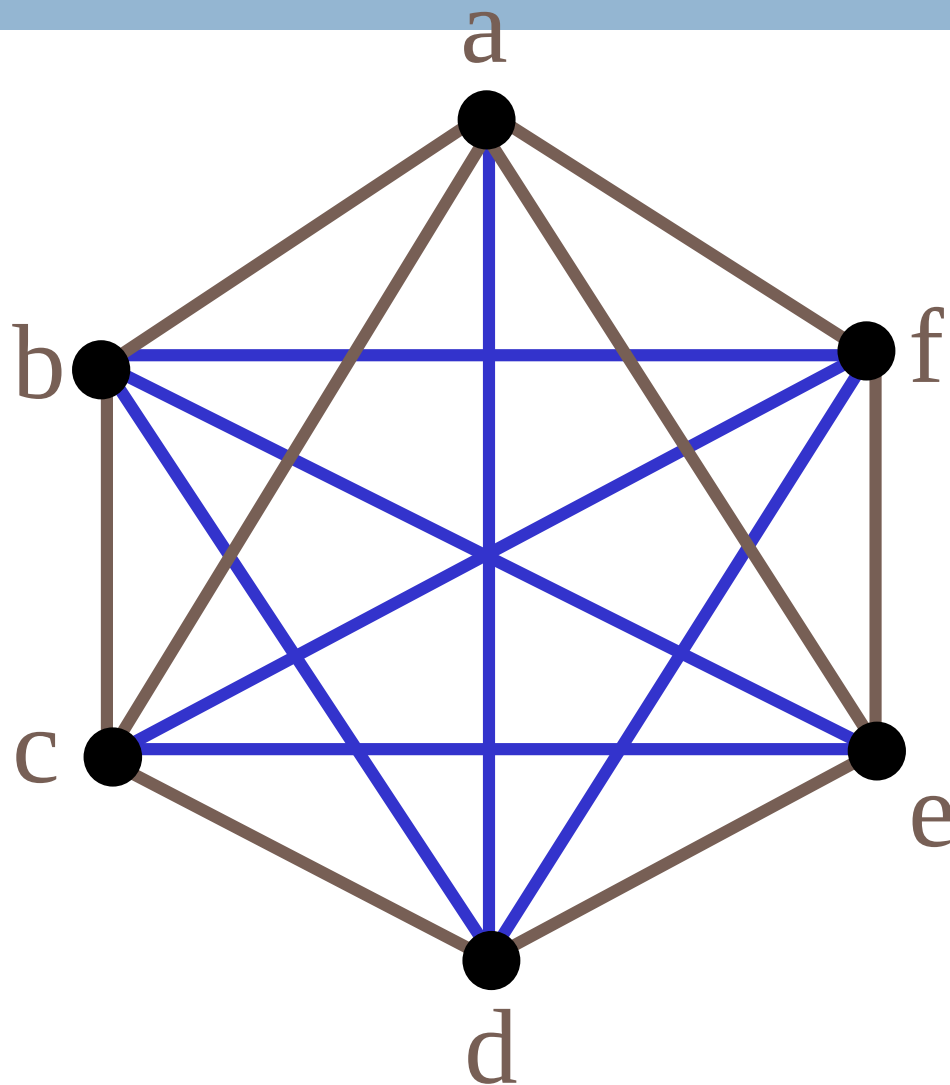
Ore定理的延伸

35

- 引理. 设 G 是有限图, u, v 是 G 中不相邻的两个顶点, 并且满足: $d(u)+d(v) \geq |G|$, 则
 G 是Hamilton图 $\Leftrightarrow G \cup \{uv\}$ 是Hamilton图.
- 证明: 类似于Ore定理的证明.
- G 的闭合图, 记为 $C(G)$: 连接 G 中不相邻的并且其度之和不小于 $|G|$ 的点, 直到没有这样的点为止.
- 有限图 G 是Hamilton图充分必要其闭合图 $C(G)$ 是Hamilton图.

闭合图(举例)

36



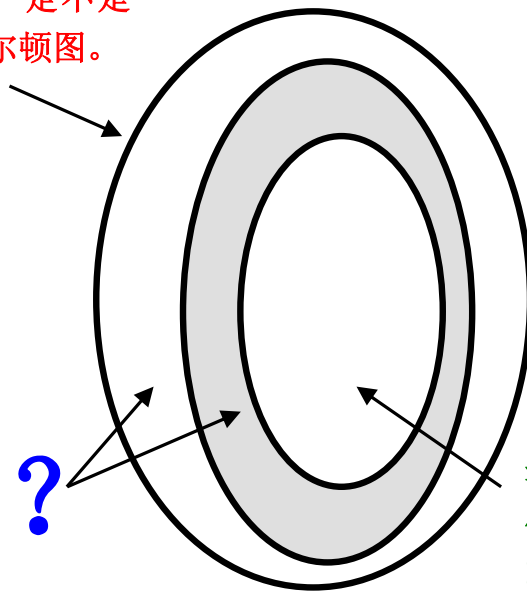
判定定理的盲区

37

□ 从“常识”出发个案处理

- 每点关联的边中恰有两条边在哈密尔顿回路中。
- 利用对称性
- 利用二部图特性
- ...

不满足必要条件，一定不是哈密尔顿图。

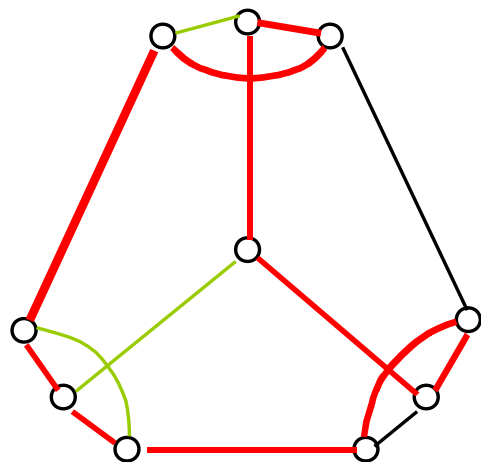
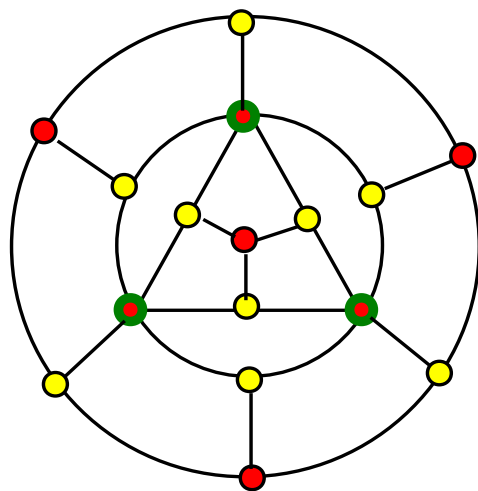
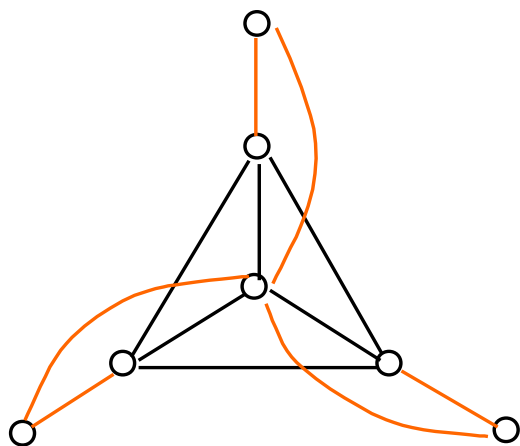


满足充分条件，一定是哈密尔顿图。

判定哈密尔顿图的例子

38

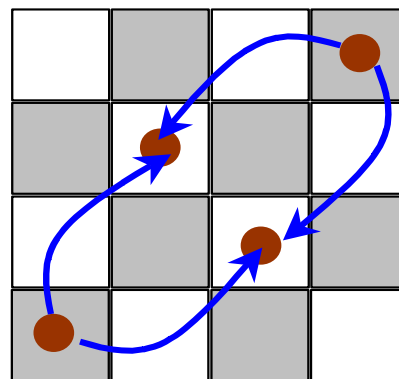
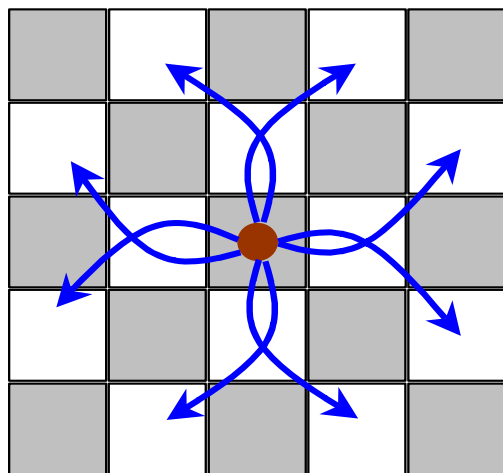
□ 下列图中只有右图是哈密尔顿图。



棋盘上的哈密尔顿回路问题

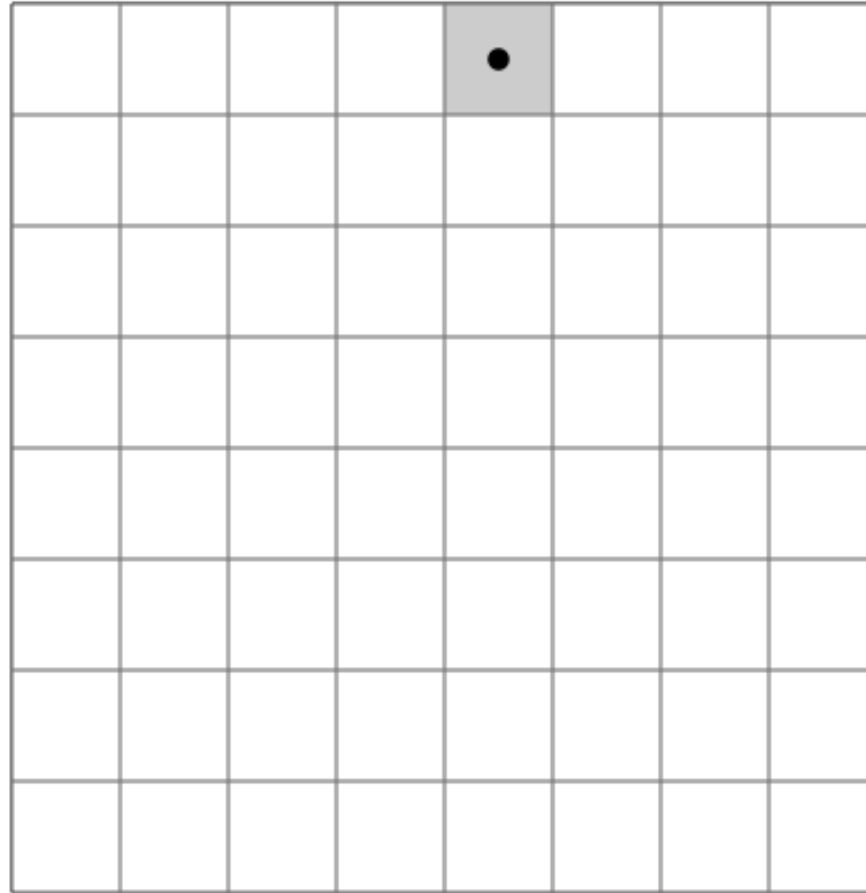
39

- 在 4×4 或 5×5 的缩小了的国际象棋棋盘上，马 (Knight)不可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点。



Knight's tour

40



From wikipedia

哈密尔顿图问题

41

□ 基本问题

- ▣ 判定哈密尔顿回路的存在性
- ▣ 找出哈密尔顿回路/通路

□ （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？

▣ NP-complete

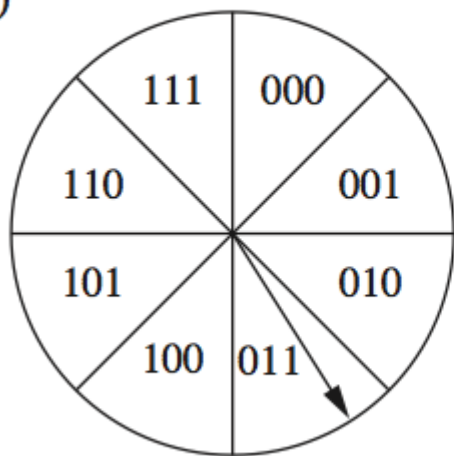
- ▣ Euler路同Hamilton路相比较，前者要周游诸弧，后者要周游诸点，虽然仅有一字之差，但两者的困难程度却不大相同。
- ▣ 对于前者，在上节我们已经得到了一些定理，比较满意地解决了这个问题；但对于后者，却没有令人满意的结果。寻找一个图是Hamilton图的充分必要条件，仍是图论中一个重要问题。

应用（格雷码）

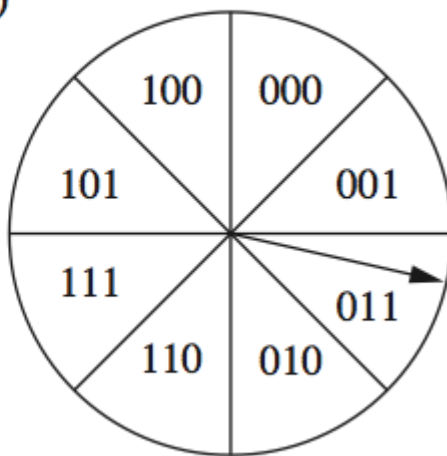
42

□ 给定一个立方体图，求出哈密尔顿回路

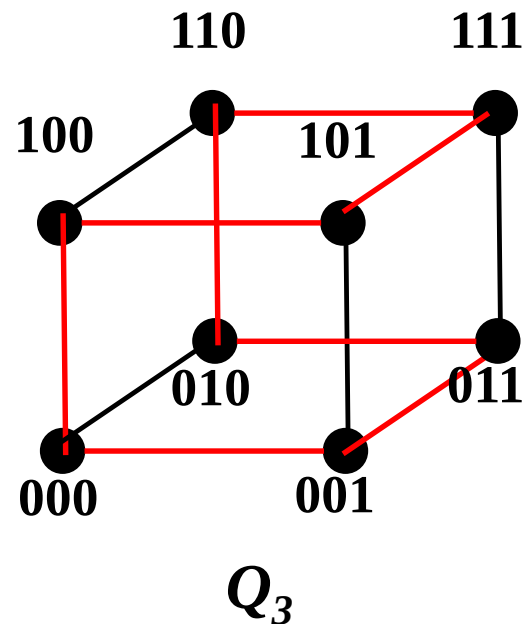
(a)



(b)



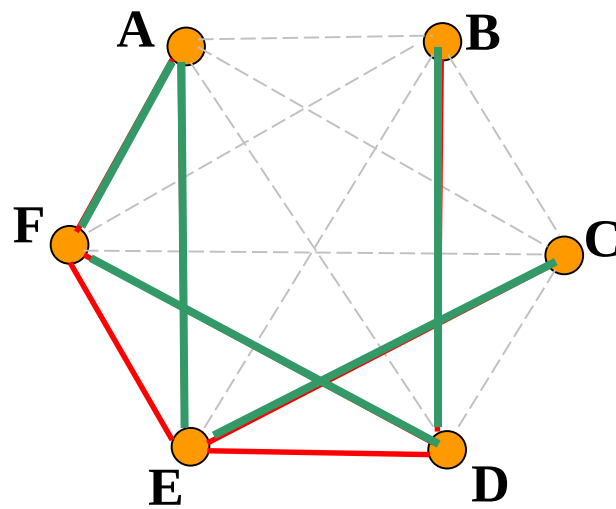
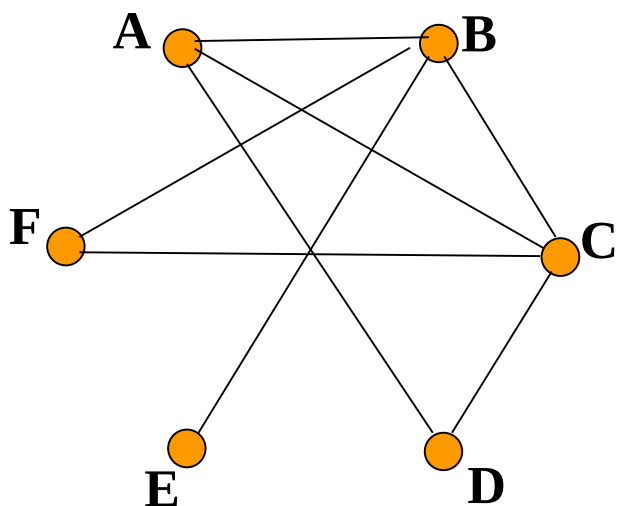
指针误差一点点可导致**3**位都错了



安排考试日程

43

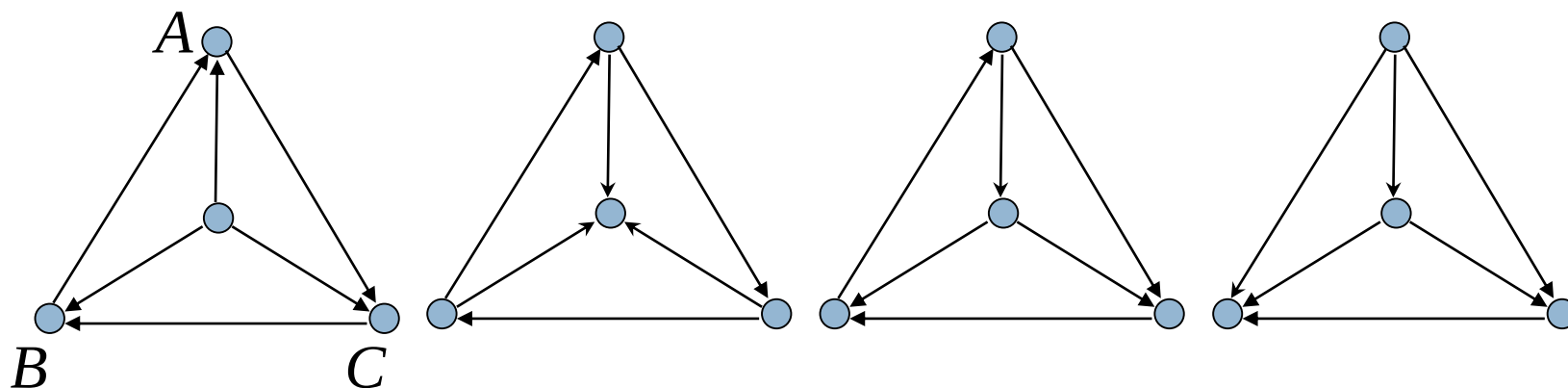
- 问题：在6天里安排6门课 – A,B,C,D,E,F - 的考试，每天考1门。假设每人选修课的情况有如下的4类：**DCA**，**BCF**，**EB**，**AB**。如何安排日程，使得没有人必须连续两天有考试？



竞赛图

44

底图为 K_4 的竞赛图:

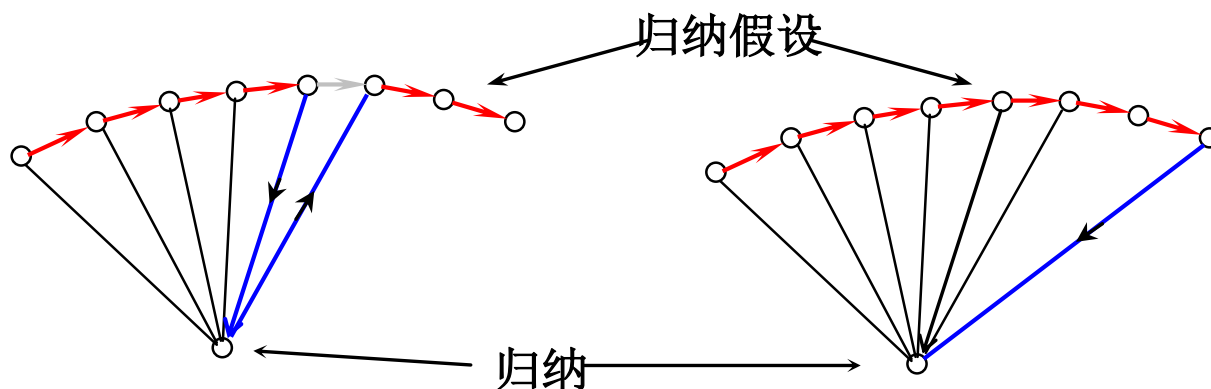


以上每个图可以看作4个选手参加的循环赛的一种结果

竞赛图与有向哈密尔顿通路

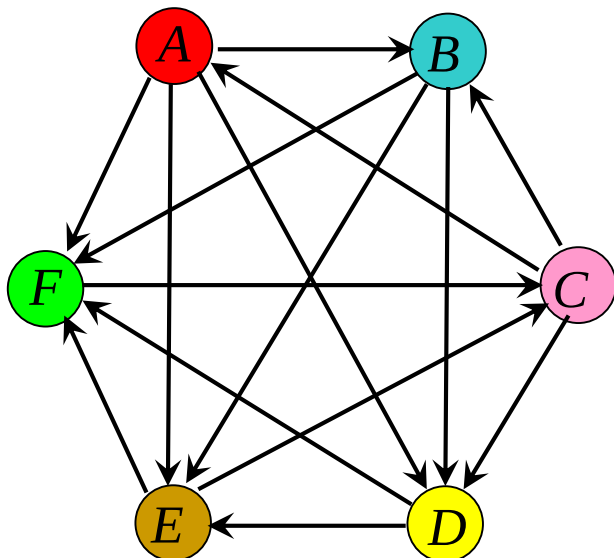
45

- 底图是完全图的有向图称为 **竞赛图**。
- 利用归纳法可以证明竞赛图含有向哈密尔顿通路。



循环赛该如何排名次

46



按照在一条有向Hamilton通路
(一定存在)上的顺序排名：

C A B D E F

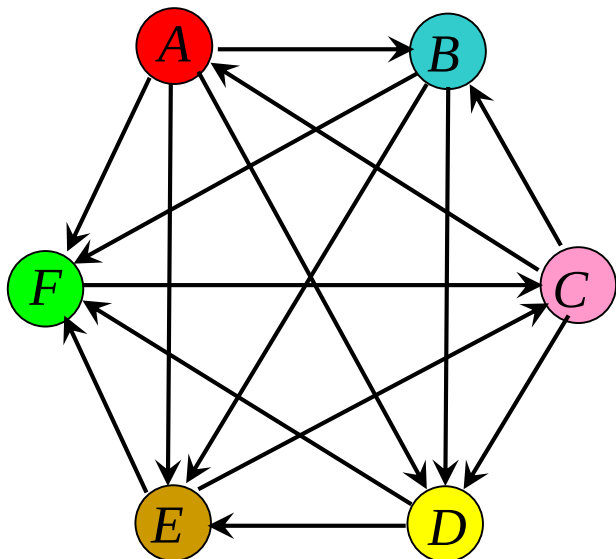
问题：Hamilton通路不是唯一的，
例如：也可以得到另一排名

A B D E F C

C 从第一名变成了最后一名

循环赛该如何排名次

47



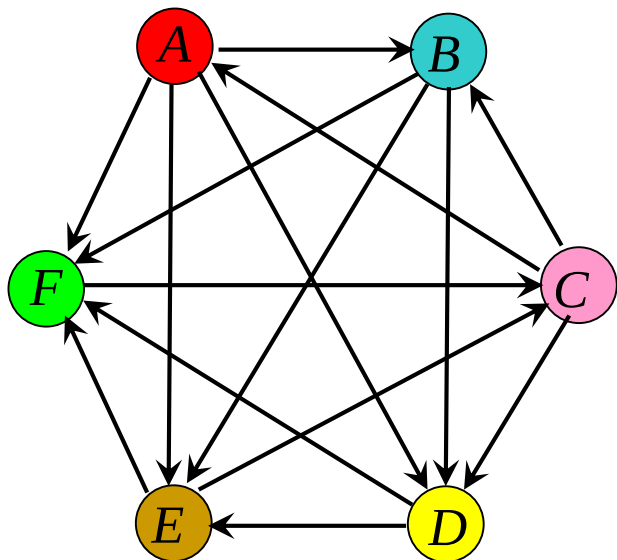
按照得胜的竞赛场次(得分)排名：

A(胜4) B,C(胜3) D,E(胜2) F(胜1)

问题：很难说B,C并列第二名是否公平，毕竟C战胜的对手比B战胜的对手的总得分更高(9比5)。

循环赛该如何排名次

48



建立对应与每个对手得分的向量

$$s_1 = (a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6)$$

然后逐次求第 k 级的得分向量 s_k , 每个选手的第 k 级得分是其战胜的对手在第 $k-1$ 级得分的总和。

对应于左图所示的竞赛结果, 得分向量:

$$s_1 = (4, 3, 3, 2, 2, 1) \quad s_2 = (8, 5, 9, 3, 4, 3)$$

$$s_3 = (15, 10, 16, 7, 12, 9) \quad s_4 = (38, 28, 32, 21, 25, 16)$$

$$s_5 = (90, 62, 87, 41, 48, 32) \quad \dots$$

当问题竞赛图是强连通且至少有4个选手时, 这个序列一定收敛于一个固定的排列, 这可以作为排名: **A C B E D F**。

本节小结

□ 内容1：欧拉图

- ▣ 什么是欧拉图：含有欧拉回路
- ▣ 欧拉图的充要条件：所有顶点度数为偶数
- ▣ 如何构造欧拉回路：Fleury算法

□ 内容2：哈密尔顿图

- ▣ 什么是哈密尔顿图：含有哈密尔顿回路
- ▣ 哈密尔顿图的必要和充分条件：
 - 必要条件： $P(G-S) \leq |S|$ ，只能用来判断一个图不是哈密尔顿图
 - 充分条件：Ore定理，只能用来判断一个图是哈密尔顿图
- ▣ 哈密尔顿图有哪些应用

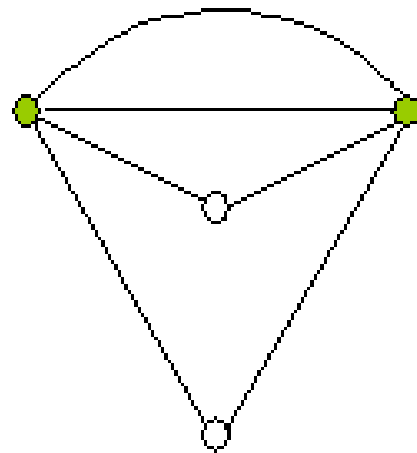
作业

50

- 见课程网站

随机欧拉图

- 设 G 是欧拉图， $v \in V_G$ ，从 v 开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则 G 称为以 v 为始点的随机欧拉图。
- 注意，若 G 是以 v 为始点的随机欧拉图，则任何一个以 v 为始点的不包含 G 中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若 G 不是以 v 为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了 v 所关联的所有边，却未包含 G 中所有边的简单回路。



随机欧拉图的判定

□ 欧拉图 G 是以 v 为始点的随机欧拉图 **当且仅当** G 中任一回路均包含 v 。

⇒ 若 G 是以 v 为始点的随机欧拉图，**假设有回路 C 不包含 v** 。令 $G'=G-C$ ，(G' 可能不连通)， G' 中**包含 v 的那个连通分支一定是欧拉图**，相应的欧拉回路包含了 v 关联的所有边，但不包含 G 中的所有边，与 G 是以 v 为始点的随机欧拉图矛盾。

⇐ 若欧拉图 G 中任意回路均包含 v 。假设 G 不是以 v 为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了 v 所关联的所有边、却未包含 G 中所有边的简单回路 C ，假设 e 是不在 C 中的一条边， e 的端点必异于 v ，设一个是 u 。令从 G 中删除 C 中所有边的图为 G' ，显然在 G' 中 v 是孤立点。而包含 u 的连通分支是欧拉图，因此 u 必包含在一回路中，但此回路不含 v ，矛盾。
(易推知：欧拉图 G 是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当 G 本身是一个初级回路)