

等价关系与偏序关系

回顾

- 问题1：关系具有哪些重要性质？
 - ▣ 自反性、对称性/反对称性、传递性
- 问题2：如何计算关系的闭包？
 - ▣ 自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$ 、对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$ 、传递闭包的Warshall算法

本节提要

3

- 1: 等价关系与等价类
- 2: 偏序关系、偏序集、偏序格

等价关系

□ 满足性质：自反、对称、传递。

□ “等于”关系的推广

□ 例子

▣ 模3同余关系: $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。

▣ $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, xRy iff 存在正整数 k, l , 使得 $x^k = y^l$ 。

■ 自反: 若 x 是任意自然数, 当然 $x^k = x^k$;

■ 对称: 若有 k, l 使 $x^k = y^l$; 也就有 l, k 使 $y^l = x^k$;

■ 传递: 若有 k, l 使 $x^k = y^l$; 并有 m, n 使 $y^n = z^m$; 则有 $x^{kn} = z^{ml}$

等价类

- R 是非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 等价类 $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$
- 每个等价类是 A 的一个非空子集。
- 例: 模3同余关系: $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
 - 3 个等价类: $[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\};$
 $[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\};$
 $[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

等价类的代表元素

- 对于等价类 $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$, x 称为这个等价类的代表元素.
- 其实, 该等价类的每个元素都可以做代表元素:
若 xRy , 则 $[x] = [y]$
 - 证明: 对任意元素 t , 若 $t \in [x]$, 则 xRt , 根据 R 的对称性与传递性, 且 xRy , 可得 yRt , 因此 $t \in [y]$, $\therefore [x] \subseteq [y]$; 同理可得 $[y] \subseteq [x]$ 。

例

- R_1, R_2 分别是集合 X_1, X_2 上的等价关系。定义 $X_1 \times X_2$ 上的关系 S :

$$(x_1, x_2) S (y_1, y_2) \text{ 当且仅当 } x_1 R_1 y_1 \text{ 且 } x_2 R_2 y_2$$

- 证明: S 是 $X_1 \times X_2$ 上的等价关系

- ▣ [自反性] 对任意 $(x, y) \in X_1 \times X_2$, 由 R_1, R_2 满足自反性可知, $(x, x) \in R_1$, $(y, y) \in R_2$; $\therefore (x, y) S (x, y)$; S 自反。
- ▣ [对称性] 假设 $(x_1, x_2) S (y_1, y_2)$, 由 S 的定义以及 R_1, R_2 满足对称性可知: $(y_1, y_2) S (x_1, x_2)$; S 对称。
- ▣ [传递性] 假设 $(x_1, x_2) S (y_1, y_2)$, 且 $(y_1, y_2) S (z_1, z_2)$, 则 $x_1 R_1 y_1, y_1 R_1 z_1$, $x_2 R_2 y_2, y_2 R_2 z_2$, 由 R_1, R_2 满足传递性可知: $x_1 R_1 z_1$, 且 $x_2 R_2 z_2$, 于是: $(x_1, x_2) S (z_1, z_2)$; S 传递。

商集

- R 是非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 则其所有等价类的集合称为 **商集**, 记为 A/R
- 例子
 - ▣ 集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上的恒等关系 I_A 是等价关系, 商集 $A/I_A = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}\}$
 - ▣ 整数集上的模3同余关系是等价关系, 其商集为 $\{\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}, \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}\}$

例

- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系 R :

$$(a, b)R(c, d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

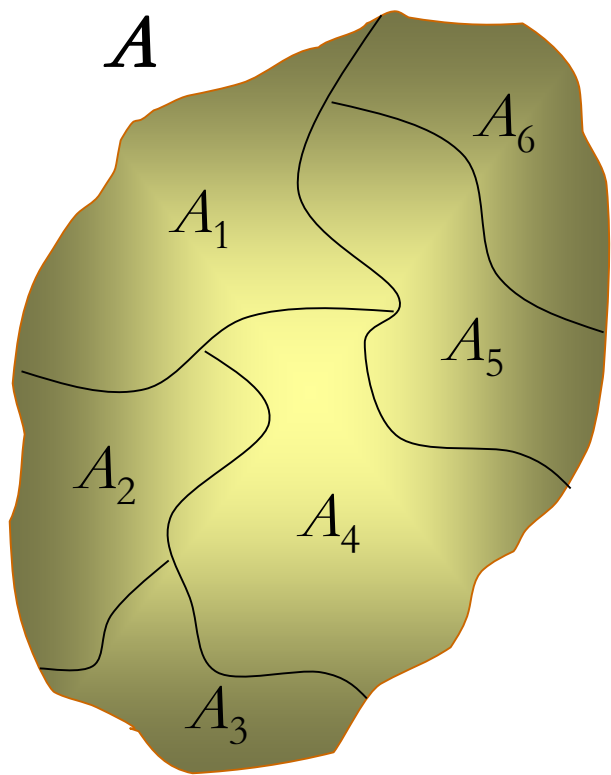
证明这是等价关系，并给出其商集。

- 定义在 $\mathbb{N}$ 上的二元关系 $R: xRy \text{ iff } x = 2^k y$ (k 为整数).

(1) 试证明 R 是等价关系；

(2) 给出商集 $\mathbb{N}/R$, 并证明 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}/R$ 等势。

集合的划分



集合 A 的 **划分**, π , 是 A 的一组非空子集的集合, 即 $\pi \subseteq \rho(A)$, 且满足:

1. 对任意 $x \in A$, 存在某个 $A_i \in \pi$, 使得 $x \in A_i$

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j \in \pi$, 如果 $i \neq j$, 则:

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

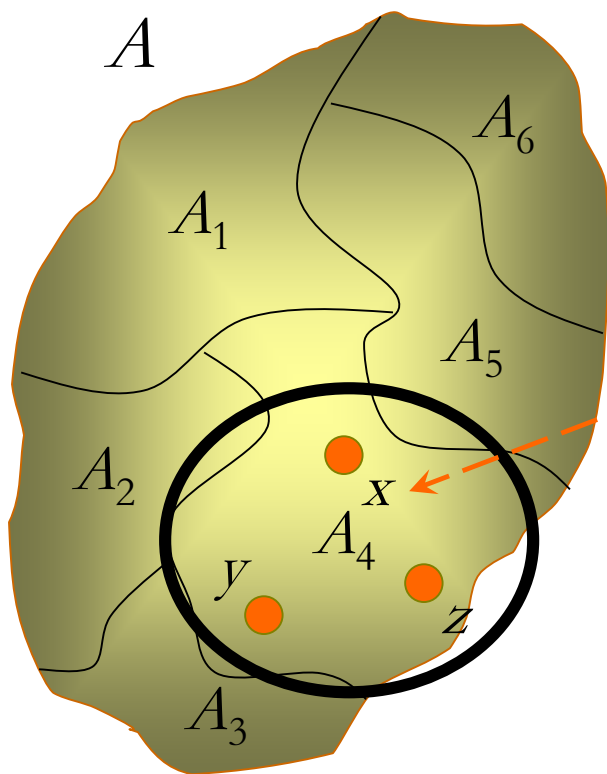
商集即划分

- 假设 R 是集合 A 上的等价关系，给定 $a \in A$, $R(a)$ 是由 R 所诱导的等价类。
- $Q = \{R(x) \mid x \in A\}$ 是相应的商集。
- 即证明：这样的商集即是 A 的一个划分：
 - ▣ 对任意 $a \in A$, $a \in R(a)$ (R 是自反的)
 - ▣ 对任意 $a, b \in A$, $(a, b) \notin R$ 当且仅当 $R(a) \cap R(b) = \emptyset$ ，即：不相等的等价类必然不相交

商集即划分

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
 - ▣ 假设 $R(a) \cap R(b) \neq \emptyset$, 设 c 是一个公共元素。
 - ▣ 根据等价类的定义, $(a, c) \in R, (b, c) \in R$
 - ▣ 对任意 $x \in R(a)$, $(a, x) \in R$, 由 R 的传递性和对称性, 可得 $(c, x) \in R$, 由此可知 $(b, x) \in R$, 即 $x \in R(b)$, $\therefore R(a) \subseteq R(b)$
 - ▣ 同理可得: $R(b) \subseteq R(a)$ 。因此: $R(a) = R(b)$

根据一个划分定义等价关系



给定 A 上一个划分，可以如下定义 A 上的等价关系 R ：

$\forall x, y \in A, (x, y) \in R$ 当且仅当：

x, y 属于该划分中的同一块。

显然，关系 R 满足自反性、对称性、传递性。因此：
 R 是等价关系。

利用等价类解题

□ 证明：

从 $1, 2, \dots, 2000$ 中任取 1001 个数，其中必有两个数 x, y ，满足 $x/y = 2^k$ 。

(k 为整数)。



想起鸽笼原理没？

利用等价类解题

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的 k 次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合 $\{1,2,3,\dots, 2000\}$ 上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数 x,y 在同一划分块中当且仅当 $x/y=2^k$ 。 $(k$ 为整数)。
- 定义集合 $\{1,2,3,\dots, 2000\}$ 上的一个关系 R ，任意 x,y ， xRy 当且仅当 $x/y=2^k$ 。易证这是一个等价关系。其商集即集合上面的划分。

本节提要

16

- 1: 等价关系与等价类
 - ▣ 等价关系：自反、对称、传递；等价关系将元素分成等价类；所有等价类的集合为商集，商集即划分
- 2: 偏序关系、偏序集及其特殊元素、偏序格

偏序关系(Partial Order)

17

- **定义（偏序关系）**：非空集合 A 上的**自反**、**反对称**和**传递**的关系称为 A 上的偏序关系，记为： $\leq$
- 设 $\leq$ 为偏序关系，若 $(a, b) \in \leq$ ，则记为 **$a \leq b$** ，读作“ a 小于或等于 b ”

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系。

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系。

偏序关系 (续)

18

定义 7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$$x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 可比} \Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x.$$

任取两个元素 x 和 y , 可能有下述几种情况发生:

$$x < y (\text{或 } y < x), \quad x = y, \quad x \text{ 与 } y \text{ 不是可比的}.$$

定义 7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$\forall x, y \in A, x$ 与 y 都是可比的, 则称 R 为全序 (或线序)

实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义 7.22 $x, y \in A$, 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$, 则称 y 覆盖 x .

例如 $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

偏序集(poset)与哈斯图

19

1. 偏序集

定义 7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preceq$ 一起叫做偏序集, 记作 $(A, \preceq)$.

实例:

整数集合 Z 和数的小于或等于关系 $\leq$ 构成偏序集 $(Z, \leq)$

集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $(P(A), R_{\subseteq})$.

2. 哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点:

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

例

20

例： 证明 $(P(A), \subseteq)$ 为全序当且仅当 $|A| \leq 1$

证明： (1) “ $\Leftarrow$ ”：

Case 1: $|A| = 0$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $(P(A), \subseteq)$ 为全序

Case 2: $|A| = 1$, 设 $A = \{a\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $(P(A), \subseteq)$ 为全序

“ $\Rightarrow$ ”：只需证 $|A| \geq 2$ 时, $(P(A), \subseteq)$ 非全序

$\because |A| \geq 2 \quad \therefore$ 可取 $a, b \in A, a \neq b$

$\because \{a\} \not\subseteq \{b\} \quad \therefore (P(A), \subseteq)$ 非全序

例

21

6. 设偏序集 (A, R) 和 (B, S) , 定义 $A \times B$ 上二元关系 T :

$$(x, y) T (u, v) \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 证明自反性 任取 (x, y) ,

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySy \Rightarrow (x, y) T (x, y)$$

证明反对称性 任取 $(x, y), (u, v)$

$$\begin{aligned} (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (x, y) &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v \\ &\Rightarrow (x, y) = (u, v) \end{aligned}$$

证明传递性 任取 $(x, y), (u, v), (w, t)$

$$\begin{aligned} (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (w, t) &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt \\ &\Rightarrow (x, y) T (w, t) \end{aligned}$$

例

22

- 例：字典序(**lexicographic order**)与偏序集
 - ▣ 给定两个偏序集 $(A, \leq_A)$ 与 $(B, \leq_B)$ ，在 $A \times B$ 上定义新关系 “ $\leq$ ”：
$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$$
- 易证， $(A \times B, \leq)$ 是一个偏序集。

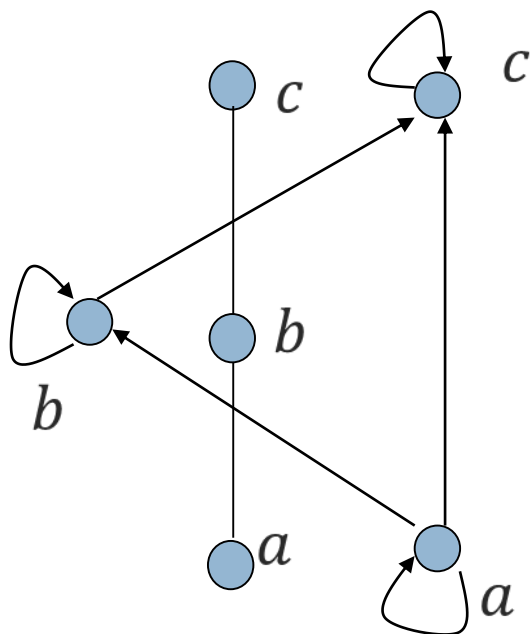
例

23

- 例：在字典中“part”和“park”两个单词的顺序如何？
- 定义全序集（英文字母表） $S = \{a, b, c, \dots, z\}$ ，元素满足线序关系 $a \leq b, b \leq c, \dots, y \leq z$ ，令 $S^4 = S \times S \times S \times S$ ，易见， $(p, a, r, t) \in S^4$ ， $(p, a, r, k) \in S^4$ ；根据字典序， $park \leq part$

哈斯图 (Hasse Diagrams)

24



将偏序关系简化为哈斯图:

- 省略所有顶点上的环
- 省略所有因传递关系而引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重排列所有顶点，而后再将所有的有向边替换为无向边

例

25

例 偏序集 $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}})$ 和 $(P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq})$ 的哈斯图.

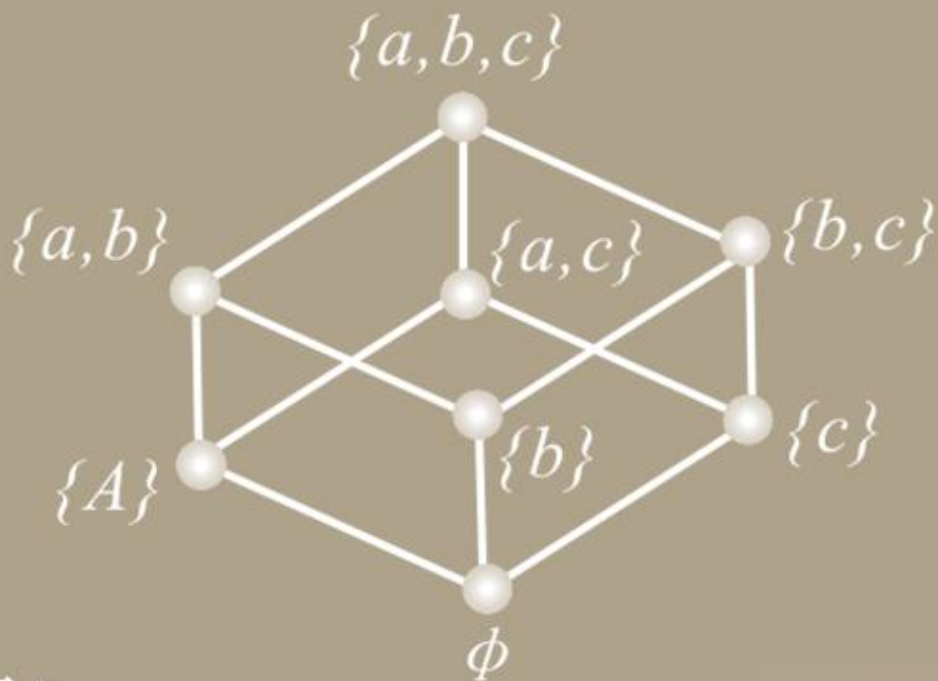
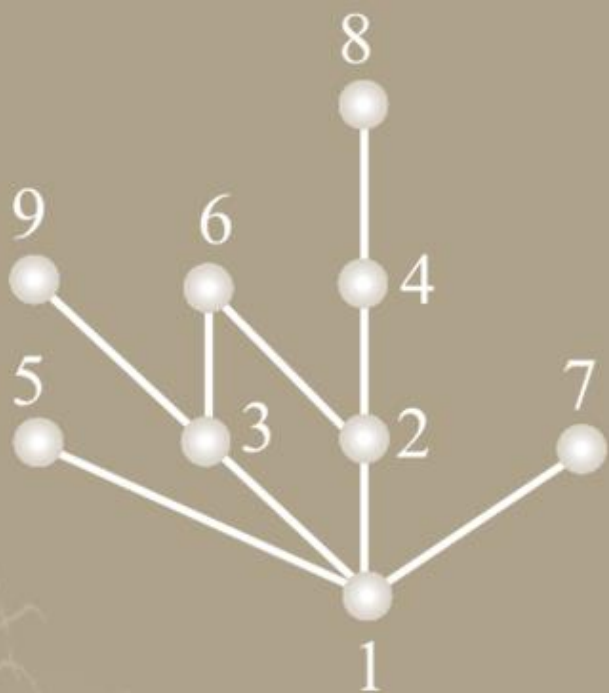
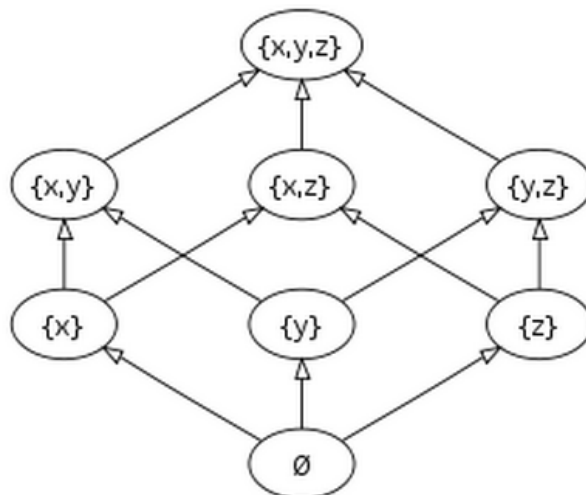


图 8

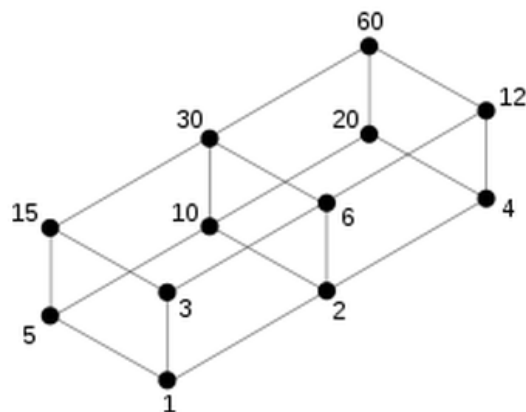
例

26

- The power set of $\{x, y, z\}$ partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:

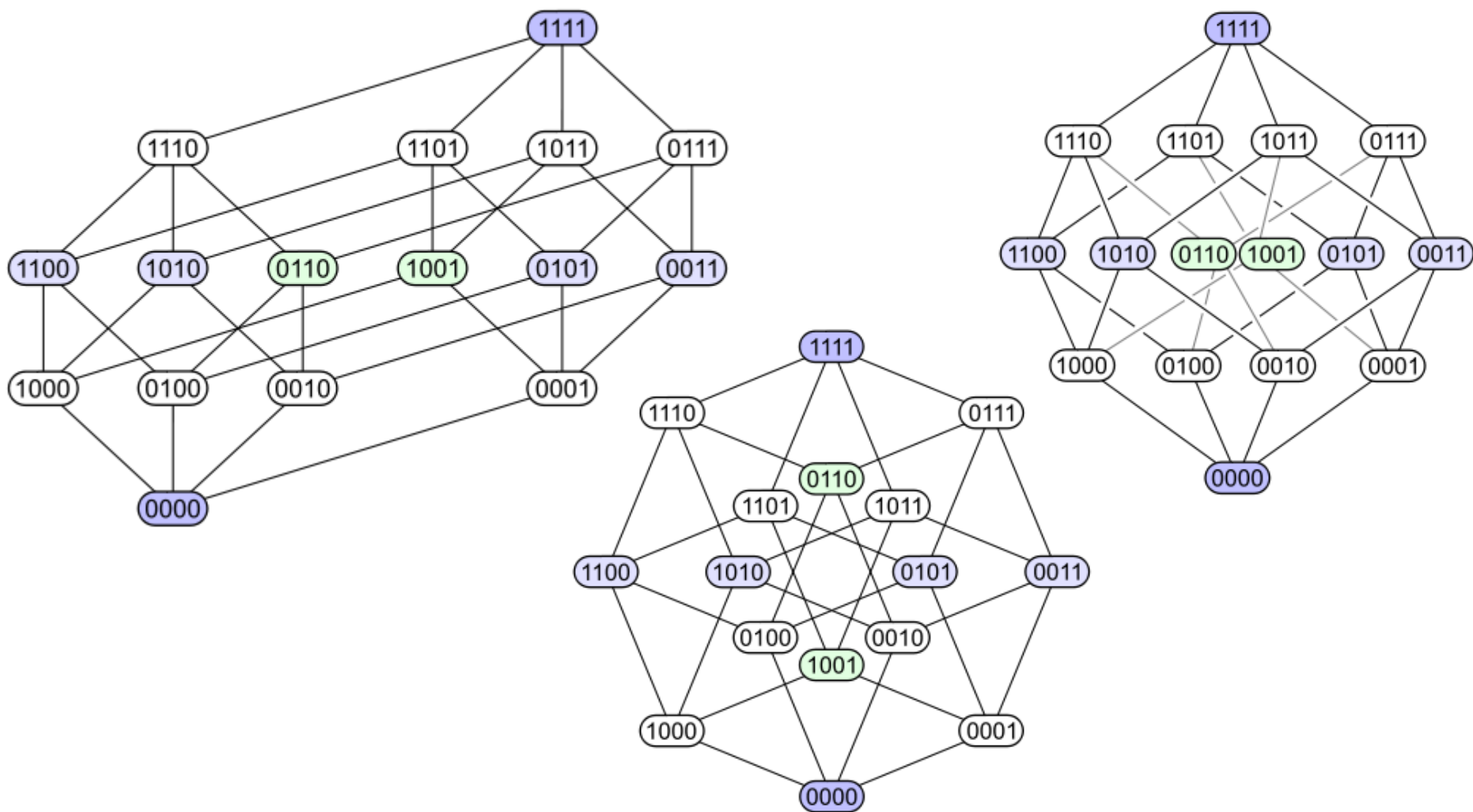


- The set $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



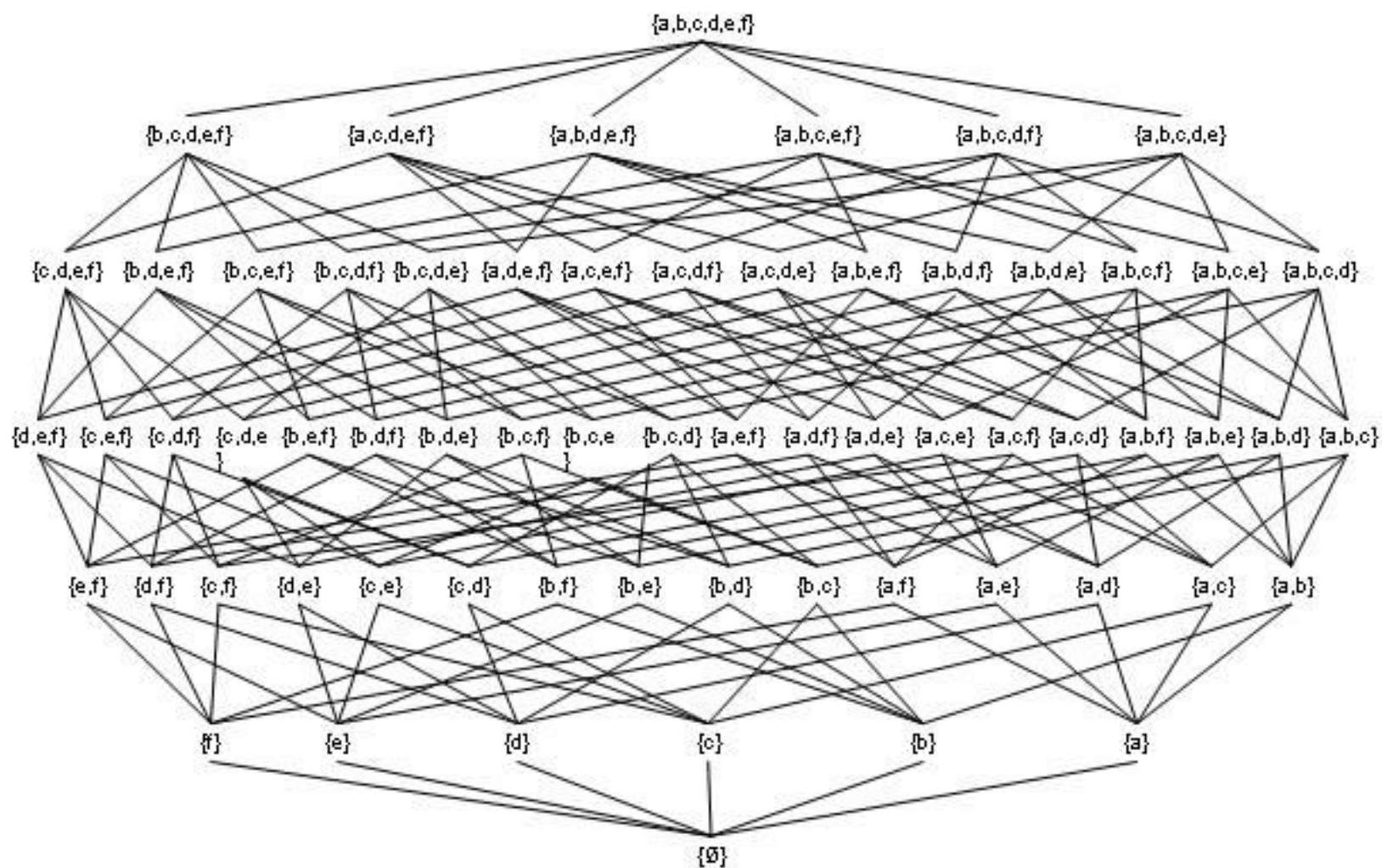
例

27



例

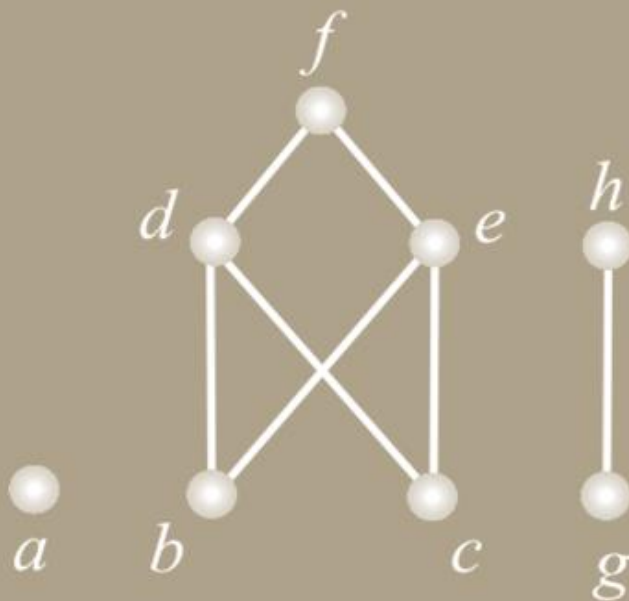
28



例

29

例 已知偏序集 (A, R) 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R = \{(b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f), (g, h)\} \cup I_A$

偏序集中的特殊元素

30

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义 7.24 设 $(A, \leq)$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$.

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极小元.
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极大元.

性质:

- 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元, 也是极大元.

偏序集中的特殊元素（续）

31

2. 下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义 7.25 设 $(A, \leq)$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$.

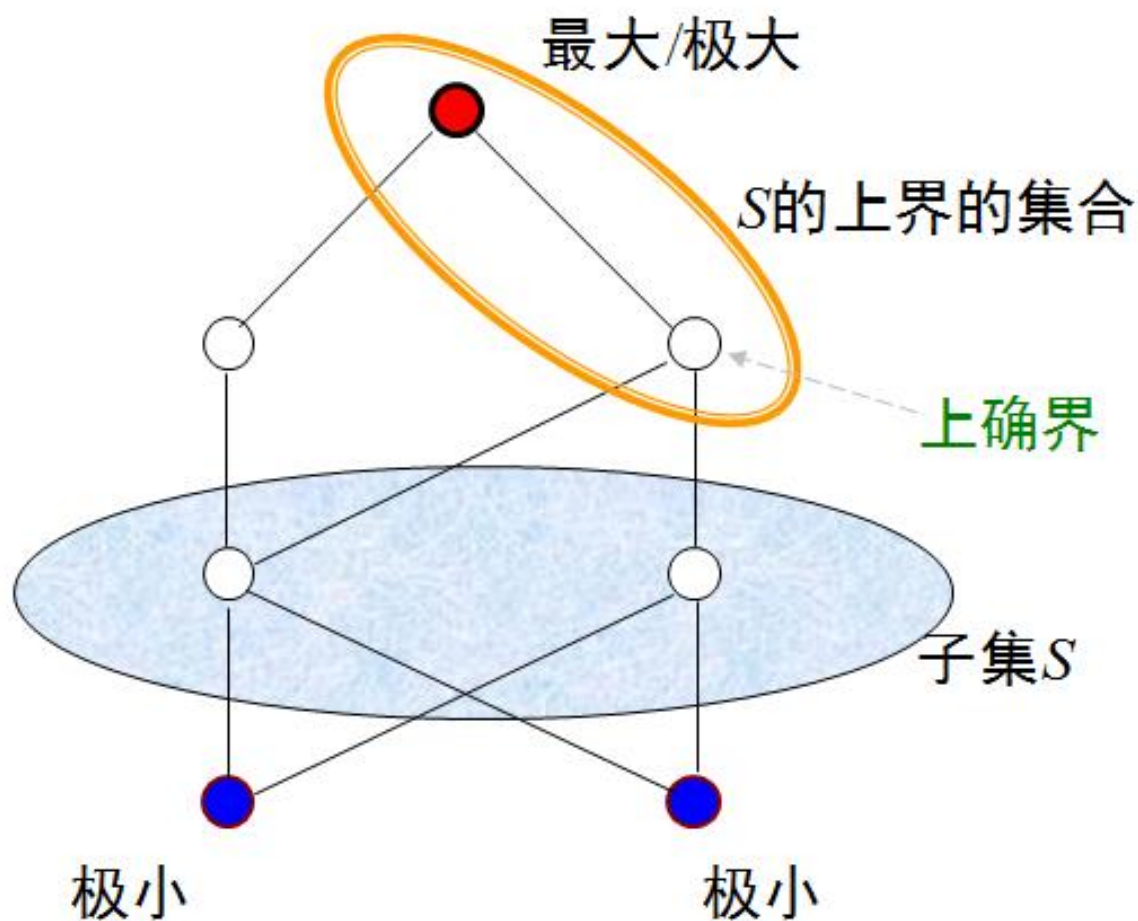
- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界.
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界.
- (3) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.
- (4) 令 $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

性质:

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在, 则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界, 最大元就是它的上确界; 反之不对.

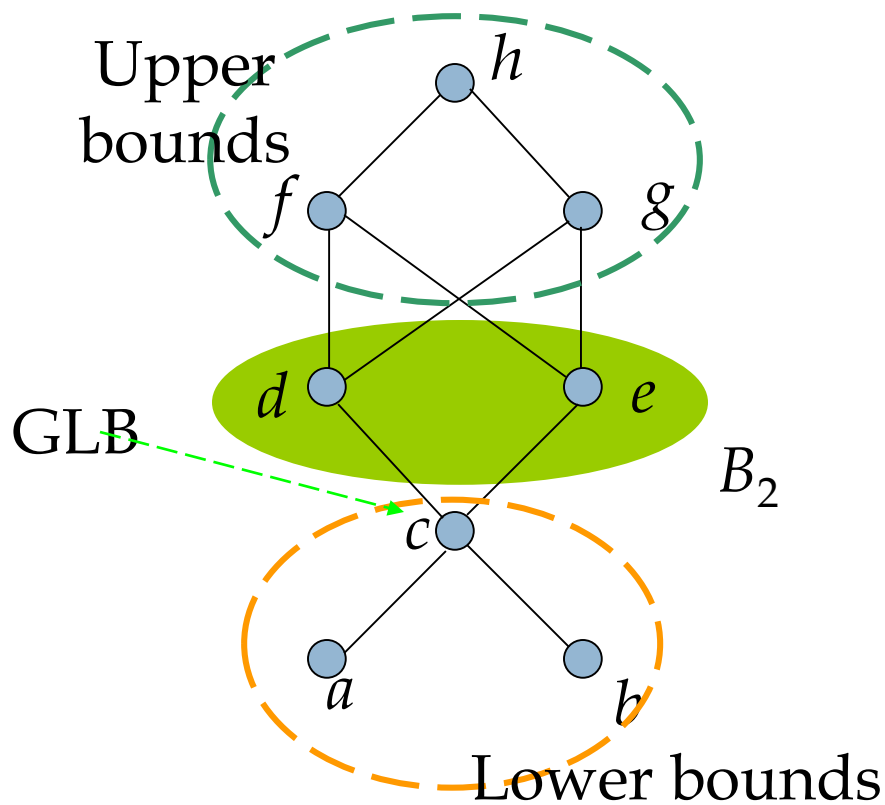
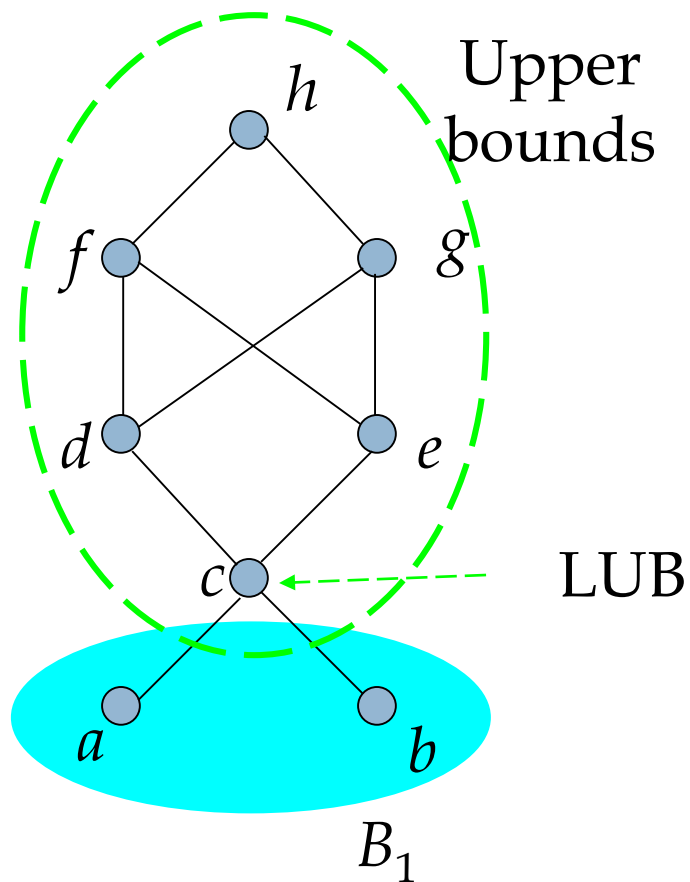
从哈斯图看特殊元素

32



从哈斯图看特殊元素（续）

33



例

34

例 设偏序集 $(A, \leq)$ 如下图所示,

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

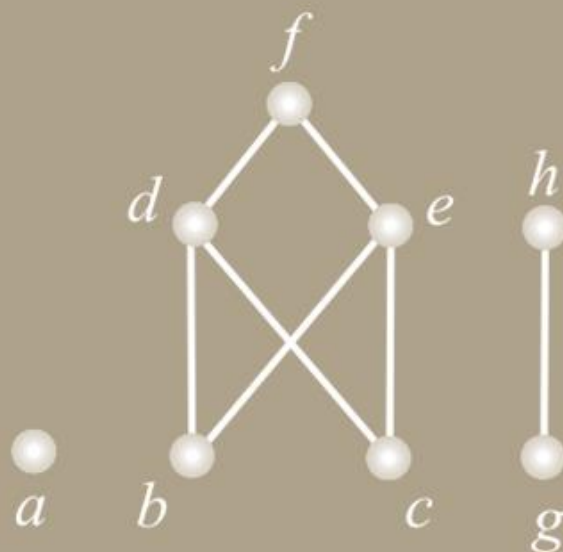


图 10

解 极小元: a, b, c, g ; 极大元: a, f, h ; 没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在, 上界有 d 和 f , 最小上界为 d .

例

35

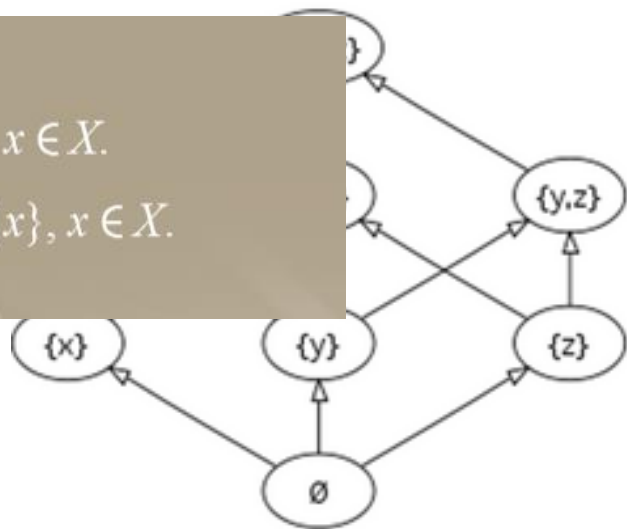
例 设 X 为集合, $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$, 且 $A \neq \emptyset$. 若 $|X| = n, n \geq 2$. 问:

- (1) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 是否存在最大元?
- (2) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 是否存在最小元?
- (3) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 中极大元和极小元的一般形式是什么?
并说明理由.

解 $(A, R_{\subseteq})$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n \geq 2$.

$(A, R_{\subseteq})$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$.

$(A, R_{\subseteq})$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X - \{x\}, x \in X$.



例

36

4. 设偏序集 (A, R) 的哈斯图如图所示.

(1) 写出 A 和 R 的集合表达式

(2) 求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

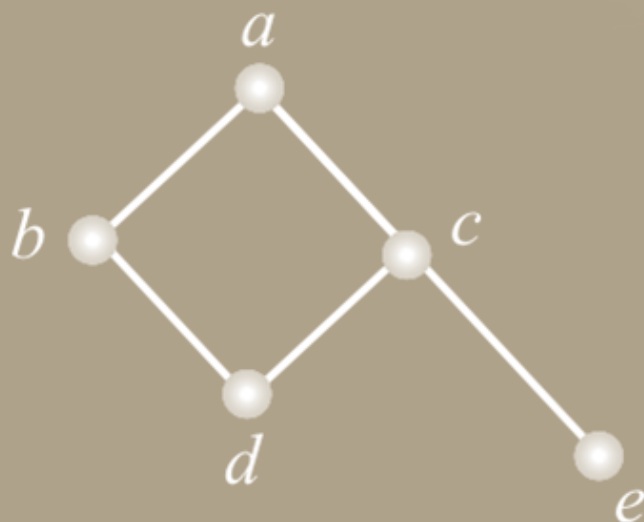


图 11



解 (1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$R = \{(d, b), (d, a), (d, c), (e, c), (e, a), (b, a), (c, a)\} \cup I_A$$

(2) 极大元和最大元是 a , 极小元是 d, e ; 没有最小元.

偏序集与格

37

- **格** (lattice) 作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
 - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
 - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中的若干基本运算

偏序集与格（续）

38

□ 格作为偏序集的定义：

定义 13.1 设 $(S, \leq)$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S$ ， $\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 $\leq$ 作成一个格。

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求 $\{x, y\}$ 的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ ，即 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界。

注意：本章中出现的 $\vee$ 和 $\wedge$ 符号只代表格中的运算，而不再有其他含义。

偏序集与格 (续)

39

2. 格的实例

例 设 n 是正整数, S_n 是 n 的正因子的集合.

D 为整除关系, 则偏序集 (S_n, D) 构成格.

$\forall x, y \in S_n$, $x \vee y$ 是 $\text{lcm}(x, y)$, 即 x 与 y 的最小公倍数.

$x \wedge y$ 是 $\text{gcd}(x, y)$, 即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 (S_8, D) , (S_6, D) 和 (S_{30}, D) .

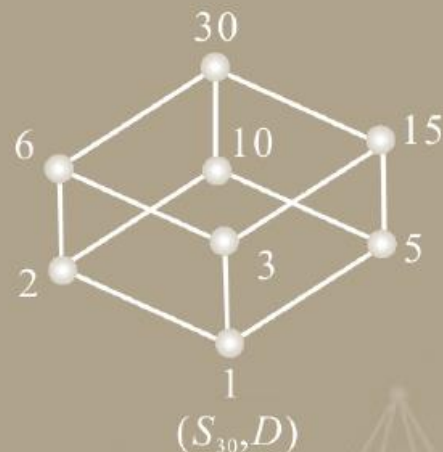


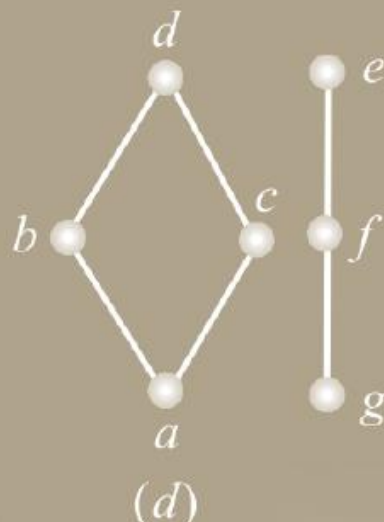
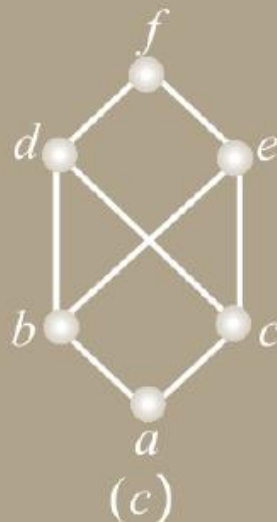
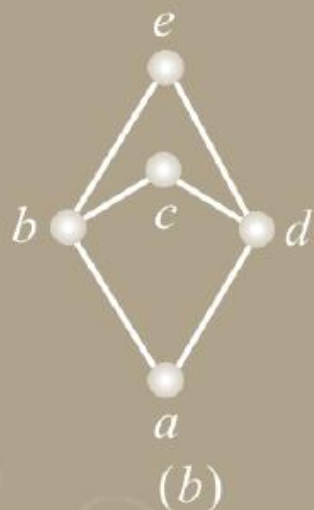
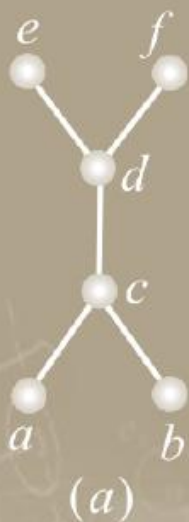
图1

例

40

例 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

- (1) $(P(B), \subseteq)$ ，其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.
- (2) $(\mathbb{Z}, \leq)$ ，其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集， $\leq$ 为小于或等于关系.
- (3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



格的对偶原理

41

对偶原理

(1) 对偶命题

定义 13.2 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\leq$ 替换成 $\geq$, $\geq$ 替换成 $\leq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.

例如, 在格中令

f 是 $(a \vee b) \wedge c \leq c$,

f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \geq c$.

格的对偶原理 (续)

42

(2) 格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题.
若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例如, 如果对一切格 L 都有

$$\forall a, b \in L, a \wedge b \leq a$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a, b \in L, a \vee b \geq a$$

本节提要

43

□ 1: 等价关系与等价类

- 等价关系：自反、对称、传递；等价关系将元素分成等价类；所有等价类的集合为商集，商集即划分

□ 2: 偏序关系、偏序集及其特殊元素、偏序格

- 偏序关系：自反、反对称、传递；偏序集；哈斯图
- 偏序集中的特殊元素：最大元、最小元、极小元、极大元；上届、上确界、下届、下确界
- 偏序格：任意两个元素均有上下确界；对偶原理

作业

44

- 见课程网站