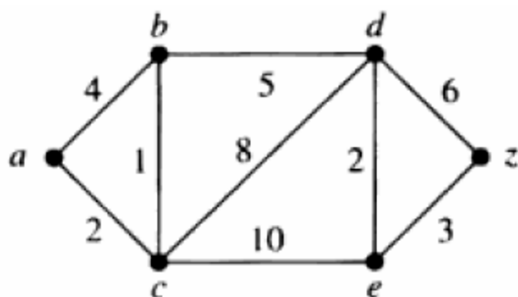


## 离散数学作业 9

### Problem 1

用弗洛伊德算法求图中所有顶点对之间的距离。



### Problem 2

若图中允许存在负权边（但不存在负权环），Dijkstra 算法是否仍然能够正确求出从源点到各顶点的最短路径？若可以，请给出证明；若不能，请构造一个反例并说明其错误原因。

### Problem 3

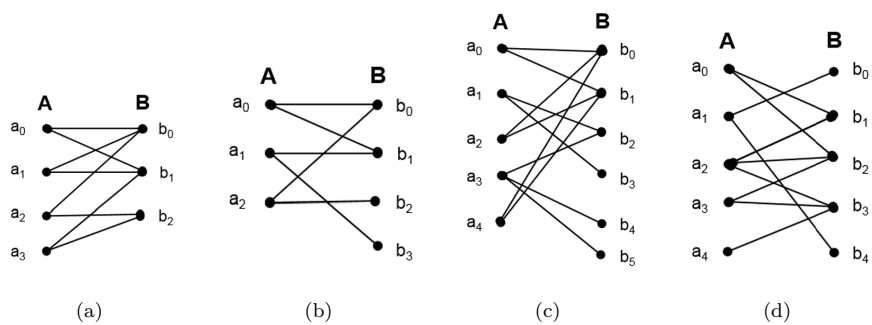
对于权值均为正的简单连通图  $G$ ，若已知图中任意两点之间的最短路径长度，是否能够唯一地构建出原图  $G$ ？若不能，请给出一个反例并说明原因。

### Problem 4

证明：一个无回路的简单连通图最多只有一个完美匹配。（完美匹配指能饱和所有顶点的匹配）

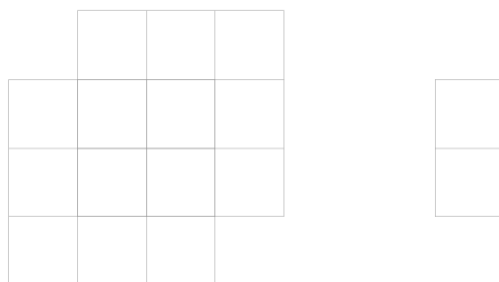
## Problem 5

对于每一个二部图  $G = (A, B, E)$ ，判断  $G$  是否有饱和  $A$  的匹配。如果没有，请说明理由。



## Problem 6

证明：一个  $4 \times 4$  的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干  $1 \times 2$  的小矩形。



## Problem 7

试证明：如果简单图  $G$  是二部图，它有  $n$  个结点、 $m$  条边，则有

$$m \leq \frac{n^2}{4}.$$

## Problem 8

假设某校计算机系学生选导师时出现了如下情况：对于每一位学生，恰好有  $k$  名感兴趣的导师；对于每一位导师，恰好有  $k$  名学生对他感兴趣。假设每位导师最多只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在一种匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。