

## 离散数学作业 8

### Problem 1

证明或反驳：若无向图  $G$  至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则  $G$  不是简单图。

### Problem 2

设无向图  $G$  有  $V$  个点、 $E$  条边， $\delta(G)$  和  $\Delta(G)$  分别表示  $G$  中度最小和度最大的点的度，证明：

$$\delta(G) \leq \frac{2E}{V} \leq \Delta(G).$$

(其中  $\frac{2E}{V}$  称为图的顶点平均度)

### Problem 3

对简单图  $G = K_2 \cup K_3$ :

1) 先写出图的邻接矩阵  $A$ 、关联矩阵  $B$ ，然后计算矩阵

$$D = BB^T - A.$$

2)  $D$  与原来的图有什么关系？试解释其原因。

### Problem 4

若简单图  $G$  与  $\overline{G}$  同构，则称  $G$  为自补图。

试证明：若正则图  $G$  是自补图，则图  $G$  的顶点数  $V$  满足

$$V \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{或} \quad V \equiv 1 \pmod{4}.$$

## Problem 5

若  $G$  是欧拉图，证明或反驳：

- 1) 当  $G$  的顶点数是奇数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。
- 2) 当  $G$  的顶点数是偶数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。

## Problem 6

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。

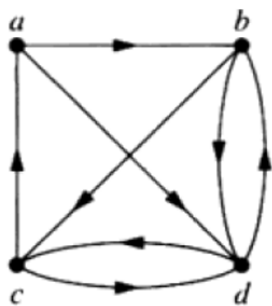


图 1: (1)

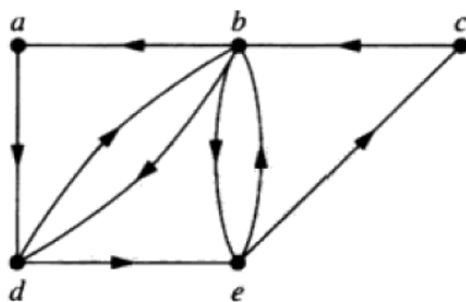


图 2: (2)

## Problem 7

若  $G$  是欧拉图，证明或反驳：

- 1) 当  $G$  的顶点数是奇数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。
- 2) 当  $G$  的顶点数是偶数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。

## Problem 8

下方所示各图是否拥有哈密顿通路？若有哈密顿通路，则求出这样一条通路。若没有哈密顿通路，则论证为什么这样的通路不存在。

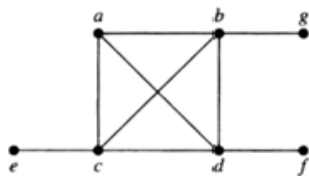


图 3: (3)

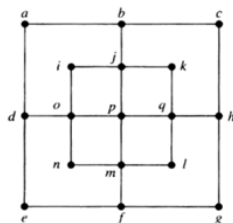


图 4: (4)

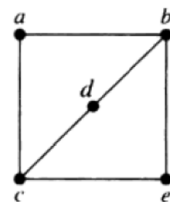


图 5: (5)