离散数学作业 Problem set 7

Problem 1

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$。

(1) $G_1 = < Z, + >$, $G_2 = < R^*, \cdot >$, 其中 R^* 为非零实数集合，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法。

$$f: Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) $G_1 = < Z, + >$, $G_2 = < A, \cdot >$, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in C \wedge |x| = 1\}$, 其中 C 为复数集合。

$$f: Z \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

Problem 2

设 $G = < a >$ 是 15 阶循环群。

(1) 求出 G 的所有生成元;

(2) 求出 G 的所有子群。

Problem 3

设 $< A, \leq >$ 是一个格，任取 $a, b \in A, a < b$(即 $a \leq b \wedge a \neq b$), 构造集合:

$$B = \{x | x \in A且 a \leq x \leq b\},$$

证明 $< B, \leq >$ 也是格.

Problem 4

设 a, b 是格 $\langle A, \leq \rangle$ 中的两个元素，证明:

(a) $a \wedge b = b$ 当且仅当 $a \vee b = a$。

(b) $a \wedge b < b$ 和 $a \wedge b < a$，当且仅当 a 与 b 是不可比较的。

Problem 5

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是分配格，$a, b \in A$，且 $a < b$，证明

$$f(x) = (x \vee a) \wedge b$$

是一个从 A 到 B 的同态映射，其中

$$B = \{x \mid x \in A \text{ 且} a \leq x \leq b\}.$$

Problem 6

考虑格 $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$，即 60 的因数在整除关系下序集。

(a) 画出 D_{60} 的 Hasse 图。

(b) 哪些元素是并不可约的？哪些元素是原子?

(c) 若 2 和 10 的补元存在，请求出。

(d) 描述 L 到自身的同构。

Problem 7

设 $< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$ 是有界格，证明 $\forall a \in L$，有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

Problem 8

求布尔表达式 $E = E(x, y, z)$ 的真值表 $T = T(E)$。其中

1. $E = xz + x'y$;
2. $E = xy'z + xy + z'$.

Problem 9

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F: 当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x, y, z) = 1$，否则 $F(x, y, z) = 0$。

(1) 给出 F 的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出 F 的表达式（无需化简）。

(3) 化简该表达式。

Problem 10

设 B 是布尔代数, B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

1. 化简 f
2. 求 f 的对偶式 f_*

Problem 11

设 B 为布尔代数，试证明: $(\forall a, b \in B)(a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$, 其中 a' 表示 a 的补元.