

离散数学作业 Problem set 5

Problem 1

在边长为 2 的正方形内任意放置 5 个点。证明：至少存在两个点，它们之间的距离不超过 $\sqrt{2}$ 。

Problem 2

假设有一个特殊的字母表只包含 6 个字母：A, B, C, D, E, F。现在从中随机选择 n 个字母（允许重复选择同一个字母，且考虑顺序），并记录选择的结果序列。那么有多少种

- (1) 总的可能序列？
- (2) 恰好包含一个字母 F 的序列？
- (3) 序列中恰好包含 4 个字母 B（假定 $n \geq 4$ ）

请给出对应的结果以及运算过程。

Problem 3

将 6 本不同的书，平均分给甲、乙、丙三人，每人 2 本，有多少种分法？

Problem 4

在一个婚礼上摄影师从 10 个人中安排 6 个人在一排拍照，其中新娘和新郎在内。如果满足下述条件，有多少种安排方式？

- (1) 新娘必须在照片中
- (2) 新娘和新郎必须都在照片中
- (3) 新娘和新郎恰好有一个在照片中

Problem 5

抛一个 6 面的骰子，连续抛直到 6 为止，问抛的次数的期望是多少

Problem 6

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货。由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵，因此制造商常常选择抽样测试。要求从每批出货中抽取 5 件产品，并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次。如果批次中包含 4 件次品，它会被拒绝的概率是多少？采样中次品数量的期望是多少？采样中次品数量的方差是多少？

Problem 7

一个把信放入信袋的机器发生了故障并且随机把信放入信袋中。在一组 100 封信中发生下面事件的概率是多少？

- (1) 没有信放对了信袋。
- (2) 恰好 1 封信放对了信袋。
- (3) 恰好 98 封信放对了信袋。
- (4) 恰好 99 封信放对了信袋。
- (5) 所有的信都放对了信袋。

Problem 8

下雨的概率为 $\frac{1}{3}$ ，小王在下雨天气迟到的概率为 $\frac{1}{2}$ ，不下雨天气迟到的概率为 $\frac{1}{4}$ ，那么小王迟到了但不下雨的概率是多少？

Problem 9

大语言模型 (Large Language Model) 是现代人工智能的核心技术之一，它能够根据上文预测下一个词的概率。模型有一个词汇表 V ，包含所有可能生成的词汇。在生成文本时，模型依次预测每个词的出现概率。如果采用一阶马尔可夫假设，即认为下一个词的出现概率只依赖于前一个词，与更早的词无关。假设某个大语言模型的词汇表为 $V = \{A, B, C\}$ ，且满足一阶马尔可夫性质。已知以下概率信息：初始概率（第一个词的概率）

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.4, \quad P(C) = 0.3$$

转移概率（给定前一个词时，下一个词的概率），转移矩阵如下：

$$M = \begin{bmatrix} P(A|A) & P(B|A) & P(C|A) \\ P(A|B) & P(B|B) & P(C|B) \\ P(A|C) & P(B|C) & P(C|C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

其中， $P(X|Y)$ 表示在词 Y 后面出现词 X 的条件概率。请计算序列“ABC”的生成概率 $P(ABC)$ 。

Problem 10

令 I 是整数集合， I 上关系 R 定义为： $R = \{(x, y) | x - y \text{ 可被 } 3 \text{ 整除}\}$ ，求证 R 是自反、对称和传递的。

Problem 11

R 和 S 都是 A 上的等价关系，下面哪些不是 A 上的等价关系？若不是，请举反例。

- | | |
|------------------------|---------------|
| 1. $R \cup S$ | 4. $R - S$ |
| 2. $R \cap S$ | 5. R^2 |
| 3. $R(A \times A - R)$ | 6. $r(R - S)$ |

Problem 12

使用 warshall 算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包

1. $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$
2. $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

Problem 13

R 和 S 都是 A 上的自反, 对称, 传递的关系, 求证 $R \cap S$ 也是自反、对称和传递的

Problem 14

设 R 是集合 A 上的自反关系, 证明对所有正整数 n , R^n 也是自反的。

Problem 15

对偏序集 $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$, 回答下述问题。

1. 求极大元素。
2. 求极小元素。
3. 存在最大元素吗? 如果存在请求出。
4. 存在最小元素吗? 如果存在请求出。
5. 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界。

6. 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界。
7. 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界。
8. 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界。

Problem 16

判断图 1 偏序关系是否构成格, 如果不是, 请说明理由。

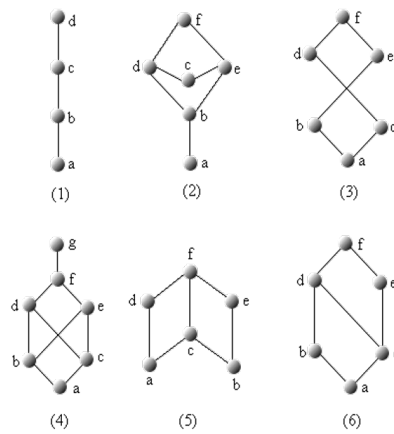


图 1: Problem 16

Problem 17

证明: 一个有穷非空偏序集有一个极大元素。