

离散数学作业 Problem set 4

Problem 1

设 a, b, c, d 均为正整数, 下列命题是否为真? 若为真, 给出证明; 否则, 给出反例。

- a) 若 $a \mid c, b \mid c$, 则 $ab \mid c$ 。
- b) 若 $a \mid c, b \mid d$, 则 $ab \mid cd$ 。
- c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$ 。
- d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$ 。

Problem 2

证明: 对于任意的整数 $n > 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

不是整数。

Problem 3

计算:

- a) $23300 \bmod 11$
- b) $2^{3300} \bmod 31$
- c) $3^{516} \bmod 7$

Problem 4

证明：对于任意的整数 n ,

- a) $6 \mid n(n+1)(n+2)$
- b) $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ 是整数。

Problem 5

证明：存在无穷多个 n 使得 $\varphi(n) > \varphi(n+1)$ 。

Problem 6

设 $P(n)$ 是命题： $n! < n^n$ ，其中 n 是大于 1 的整数。

- a) 命题 $P(2)$ 是什么？
- b) 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。
- c) 归纳假设是什么？
- d) 在归纳步骤中你需要证明什么？
- e) 完成归纳步骤。
- f) 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

Problem 7

递归定义双斐波那契数列 $D_0, D_1, \dots$ 如下：

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1, \quad D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2} \quad (n > 1)$$

试证明：

- a) 所有双斐波那契数均为奇数。
- b) 任何两个相邻的双斐波那契数均互质。

Problem 8

使用良序性证明： $\sqrt{2}$ 是无理数。(提示：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则存在整数 p, q 满足 $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ，同时可以得到 $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.)

Problem 9

用强归纳法证明：对于任意自然数 n ，存在自然数 a, b 满足：

$$5^n = a^2 + b^2.$$

Problem 10

设 a, b 为正整数，并设函数 Q 的递归定义如下：

$$Q(a, b) = \begin{cases} 0, & a < b, \\ Q(a - b, b) + 1, & b \leq a \end{cases}$$

- a) 计算：(1) $Q(2, 5)$ ；(2) $Q(12, 5)$ 。
- b) 函数 Q 的用处是什么？计算 $Q(5861, 7)$ 。