

离散数学作业 Problem set 3

Problem 1

判断下列各函数是否是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射函数。

1. $f(x) = 2x + 1$

3. $f(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = x^3$

4. $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

Problem 2

求下列函数的定义域和值域。

1. 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。
2. 函数为每个正整数指派在该整数中未出现的 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 数字的个数。
3. 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。
4. 函数为位串指派串中第一个 1 的位置值，如果位串为全 0 就指派 0。

Problem 3

令 f 和 g 都是实数集合 $\mathbb{R}$ 上的函数, 如下:

$$f = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = 3x + 1 \}$$

$$g = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + x \}$$

分别求 $g \circ f, f \circ g, f \circ f, g \circ g$

Problem 4

令 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数。令 S 和 T 为 A 的子集。证明

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Problem 5

对任意集合 A , 恒等函数 $1_A : A \rightarrow A$ 被定义为对 A 中的任意 x , $1_A(x) = x$. 现有函数 $f : A \rightarrow B$ 和函数 $g : B \rightarrow A$ 使得 $g \circ f = 1_A$. 证明 f 是单射函数, g 是满射函数。

Problem 6

确定下列各集合是否是可数的或不可数的。对那些可数无限集合, 给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

- a) 不包含位 0 的全部位串
- b) 不能写成分母不小于 4 的全部正有理数
- c) 十进制表示中不包含 0 的实数
- d) 十进制表示中仅包含有限个 1 的实数

Problem 7

证明有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是可数的。

Problem 8

希尔伯特大饭店有可数无限多个房间, 并且已全部住满。

证明如果有有限多个客人到来, 他们依然可以被安排入住。

进一步，证明如果有可数无限多个客人到来，他们也可以被安排入住。

最后，考虑有可数无限多群、每群又包含可数多个新客人同时到来，说明如何安排他们的房间。

Problem 9

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子使得 $A \cap B$ 是

- a) 有限的。
- b) 可数无限的。
- c) 不可数的。