

## 离散数学作业 Problem set 2

### Problem 1

用归谬法证明：没有有理数  $r$  使得  $r^3 + r + 1 = 0$ 。

提示： $r = a/b$ 。

### Problem 2

证明  $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$ 、 $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$  和  $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$  这三个数中任意两个数之积是非负的。你的证明是构造性的还是非构造性的？

提示：不要尝试计算这些数！

### Problem 3

在黑板上写下数字  $1, 2, \dots, 2n$ ，其中  $n$  是奇数。从中任意挑出两个数  $j$  和  $k$ ，在黑板上写下  $|j - k|$  并擦掉  $j$  和  $k$ 。继续这个过程，直到黑板上只剩下一个整数为止。

证明：这个整数必为奇数。

### Problem 4

判断下列命题的真值

1.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
2.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
3.  $\emptyset \in \emptyset^{++}$
4.  $\emptyset$  是所有集合的真子集

### Problem 5

设  $A = \{x, \{x\}, \{x, y\}, \{\{x, y\}, z\}\}$ ，判断下列命题的真值。

$$1. \{x\} \subset A$$

$$2. z \in A$$

$$3. \{\{x, y\}\} \subset A$$

$$4. \{x, y\} \in \{\{x, y\}, z\}$$

$$5. (\{x\} \subset A) \rightarrow (z \in \emptyset)$$

$$6. \text{ 设 } B = \{x, y\}, \text{ 则 } 2^B \subset A$$

## Problem 6

使用集合恒等式或谓词逻辑证明

$$1. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$2. (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$3. (A - B) - C = (A - C) - (B - C)$$

$$4. A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

## Problem 7

设集合  $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ , 求  $2^A$

## Problem 8

$A, B$  是有限集合,  $P(A)$  表示  $A$  的幂集, 已知  $|A| = 5, |P(B)| = 512, |P(A \oplus B)| = 1024$ , 则  $|B|, |A \cap B|, |A \cup B|, |A - B|, |B - A|$  分别等于多少